Věta 22 X, Y NLP, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ $\quad [T' : Y^* \to X^*,\ T'f = f \circ T]$

(1) $\mathrm{Ker}\, T' = (R(T))^{\perp}$

$$\ulcorner\ f \in \mathrm{Ker}\, T' \iff T'f = 0 \overset{T'f \in X^*}{\iff} \forall x \in X : \underbrace{T'f(x)}_{= f(Tx)} = 0 \iff \forall x \in X : f(Tx) = 0 \iff$$

$$\iff \forall y \in R(T) : f(y) = 0 \iff f \in (R(T))^{\perp}\ \lrcorner$$

(2) $\mathrm{Ker}\, T = (R(T'))_{\perp}$

$$\ulcorner\ x \in \mathrm{Ker}\, T \iff Tx = 0 \underset{\text{Důsledek II.8}}{\iff} \forall f \in Y^* : f(Tx) = 0 \iff \forall f \in Y^* : \underbrace{T'f(x)}_{= T'f(x)} = 0 \iff$$

$$\iff \forall g \in R(T') : g(x) = 0 \iff x \in (R(T'))_{\perp}\ \lrcorner$$

(3) $R(T) \subset (\mathrm{Ker}\, T')_{\perp}$

$\ulcorner$ $y \in R(T)$, $f \in \mathrm{Ker}\, T'$ $\Rightarrow$ ex. $x \in X$ $y = Tx$. Pak $f(y) = f(Tx) = \underset{f \in \mathrm{Ker}\, T'}{T'f(x)} = 0(x) = 0$ $\lrcorner$

(4) $(\mathrm{Ker}\, T')_{\perp}$ je zřejmě uzavřený, tedy z (3) plyne $\overline{R(T)} \subset \mathrm{Ker}\, T'$

(5) $(\mathrm{Ker}\, T')_{\perp} \subset \overline{R(T)}$

$\ulcorner$ Nechť $y_0 \in Y \setminus \overline{R(T)}$. Podle Věty II.9 existuje $f \in Y^*$, že $f(y_0) \neq 0$ a $f|_{R(T)} = 0$
$f|_{R(T)} = 0$ znamená $f \in (R(T))^{\perp}$. Dle (1) to znamená $f \in \mathrm{Ker}\, T'$
protože $f(y_0) \neq 0$, dostáváme $y_0 \notin (\mathrm{Ker}\, T')_{\perp}$ $\lrcorner$

Důsledek 23 $T \in \mathcal{L}(X,Y) \Rightarrow$ (T' je prostý $\iff$ $R(T)$ je hustá v Y)

Dk: T' prostý $\iff \mathrm{Ker}\, T' = \{0\} \overset{V22}{\iff} (R(T))^{\perp} = 0 \iff \overline{R(T)} = Y$

Důsledek II.10 říká, že

$$\overline{R(T)} = Y \iff \forall f \in Y^* : \underbrace{f|_{R(T)} = 0}_{f \in (R(T))^{\perp}} \Rightarrow \underbrace{f|_Y = 0}_{f = 0}$$

Dodatky z Věte 22

X, Y NLP, $T: X \to Y$ spojitý lineární operátor

- $R(T') \subset (\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$

$\Big[$ $x^* \in R(T')$, $x \in \mathrm{Ker}\, T$

$\Rightarrow$ ex. $y^* \in Y^*$: $x^* = T'y^*$

Pak $x^*(x) = (T'y^*)(x) = y^*(Tx) = y^*(0) = 0$

tedy $x^* \in (\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$ $\Big]$

- Tedy: $\overline{R(T')} \subset (\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$

- Obecně $\overline{R(T')} \subsetneq (\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$

Příklad: $X = \ell_1$, $Y = c_0$, $T: X \to Y$ je „identita"

Pak $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$, tedy $(\mathrm{Ker}\, T)^{\perp} = X^*$

Přitom $X^* \simeq \ell^{\infty}$, $Y^* \simeq \ell^1$ (dle oddílu II.6)

dualita ℓ^1 a c_0 ($\ell^1 = (c_0)^*$)

Při této reprezentaci:

$(x_n) \in \ell^1$

$(y_n) \in \ell_1$

$$(T'((x_n)))((y_n)) = (x_n)(T(y_n)) = (x_n)((y_n)) =$$

$$= \sum x_n y_n = (x_n)((y_n))$$

dualita $\ell^{\infty} = (\ell^1)^*$

Tedy $T'((x_n)) = (x_n)$, tj. T' je „identita".

$\Rightarrow$ $R(T') = \ell^1 \subset\subset \ell^{\infty}$, to není husté, protože uzávěr je roven c_0

Co opravdu platí: $(\operatorname{Ker} T)^{\perp} = \overline{R(T')}^{w^*}$

(w^* = topologie bodové konvergence na X (na X^*))

Bez

To bude ve FA 1

($\supset$: $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ je w^*-uzavřený + $R(T') \subset (\operatorname{Ker}(T))^{\perp}$

$\subset$: $x^* \notin \overline{R(T')}^{w^*}$ $\Rightarrow$ dle H-B věty pro w^*-topologii

existuje $x \in X$, že $x^*(x) \neq 0$ a $\underbrace{\forall z^* \in R(T'): z^*(x) = 0}$

$\Downarrow$

$\forall y^* \in Y^*: T'y^*(x) = 0$

$y^*(Tx) = 0$

$\Downarrow$

$Tx = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} T$)