X, Y NLP, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$

T je izomorfizmus X do Y $\iff$ $T' : Y^* \to X^*$ je na.

Dk: „$\Rightarrow$" T buď izomorfizmus X do Y. Označme $X_1 := T(X)$

Pak X je izomorfní X_1

$$x^* \in X^* \Rightarrow x^* \circ T^{-1} \in X_1^* \overset{H-B}{\Rightarrow} \exists y^* \in Y^* : y^*|_{X_1} = x^* \circ T^{-1}$$

Pak $T' y^* = x^*$

$\left(\text{pro } x \in X : \quad T' y^* (x) = y^* (Tx) = x^* (x) \right)$

$\Rightarrow T'$ je na.

„$\Leftarrow$" • T' je na $\Rightarrow \ker (T) = \left(R(T') \right)_{\perp} = \left(X^* \right)_{\perp} = \{0\} \Rightarrow T$ je prostý

• X^*, Y^* úplné, T' na $\Rightarrow T'$ je otevřené zobrazení

$\Rightarrow \exists c > 0 \quad T'(U_{Y^*}) \supset c \cdot U_{X^*}$

$x \in X, \|x\| = 1 \Rightarrow \exists x^* \in S_{X^*}, x^*(x) = 1$

$\exists y^* \in U_{Y^*} : \quad T'(y^*) = \frac{c}{2} \cdot x^*$

$$y^* (Tx) = T'(y^*)(x) = \frac{c}{2} x^* (x) = \frac{c}{2}$$

$\Rightarrow \|Tx\| \geq \frac{c}{2}$, (pro každé $x \in S_X$)

Tedy: $\|Tx\| \geq \frac{c}{2} \|x\|, \ x \in X \Rightarrow T$ je izomorfizmus X do Y.

X, Y Banachovy prostory, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$

T je na $\iff$ T' je izomorfismus Y^* do X^*

Dk: „$\Rightarrow$" T na, X, Y úplné $\Rightarrow$ T otevřené zobrazení $\Rightarrow$ ex. $c > 0$ $T(U_X) \supset c\, U_Y$

$$y^* \in Y^* \Rightarrow \|T' y^*\| = \sup\{|T' y^*(x)| : x \in U_X\}$$
$$= \sup\{|y^*(Tx)| : x \in U_X\}$$
$$\geq \sup\{|y^*(y)| : y \in c\, U_Y\} = c\|y^*\|$$

Tedy T' je izomorfismus do.

„$\Leftarrow$" T' izomorfismus do

$\Rightarrow \exists\, c > 0 : \|T' y^*\| \geq c\|y^*\|$ pro $y^* \in Y^*$

Jako výše: $\sup\{|y^*(Tx)| ; x \in U_X\} \geq c\|y^*\|$.

Ukážeme, že z toho plyne $\overline{T(U_X)} \supset c \cdot U_Y$

Kdyby ne, pak existuje $y_0 \in c \cdot U_Y \setminus \overline{T(U_X)}$

Podle Věty II.11 (aplikované na $\{y_0\}$ a $\overline{T(U_X)}$) existuje $y^* \in Y^*$, pro který $\operatorname{Re} y^*(y_0) > \sup\{\operatorname{Re} y^*(y), y \in \overline{T(U_X)}\}$

$$\geq \sup\{\operatorname{Re} y^*(Tx), x \in U_X\}$$
$$= \sup\{|y^*(Tx)|, x \in U_X\} \geq c\|y^*\|$$

$\leq$ jasné

$\geq$: $x \in U_X \Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{F}, |\alpha| = 1$, že $|y^*(Tx)| = \alpha y^*(Tx) = y^*(T(\alpha x)) = \operatorname{Re} y^*(T(\alpha x))$ a přitom $\alpha x \in U_X$

Tedy $c\|y^*\| < \operatorname{Re} y^*(y_0) \leq |y^*(y_0)| \leq \|y^*\| \cdot \|y_0\| < c\|y^*\|$ ... spor

$y_0 \in c \cdot U_Y$

Máme tedy $\overline{T(U_X)} \supset c\, U_Y$. Z Lemmatu 9 plyne $T(U_X) \supset c \cdot U_Y$.

Tedy T je na.