Důkaz Věty 30 $\qquad X$ Banachův, $T \in \mathcal{L}(X)$

(a) $\varrho(T)$ je otevřená podmnožina $\mathbb{C}$:

$\ulcorner$ $\lambda \in \varrho(T) \Rightarrow \lambda I - T$ invertibilní

$\|(\mu I - T) - (\lambda I - T)\| = |\mu - \lambda|$

Tedy, dle Tvrzení 29(b) platí:

$|\mu - \lambda| < \|(\lambda I - T)^{-1}\| \Rightarrow (\mu I - T)$ invertibilní

tj. $U(\lambda, \|(\lambda I - T)^{-1}\|) \subset \varrho(T)$ $\lrcorner$

(b) $\forall x \in X \ \forall x^* \in X^* \quad \lambda \mapsto x^*((\lambda I - T)^{-1}x)$ je holomorfní na $\varrho(T)$

$\ulcorner$ Nechť $\lambda \in \varrho(T)$. Dle (a) je $U(\lambda, \|(\lambda I - T)^{-1}\|) \subset \varrho(T)$

a dle T29(b) můžeme vyjádřit $(\mu I - T)^{-1}$ pro $\mu \in U(\lambda, \|(\lambda I - T)^{-1}\|)$

Spočítejme to:

do T29(b) dosadíme „T" $= (\lambda I - T)$, „S" $= (\mu I - T)$

Pak

$$\text{„}ST^{-1}\text{"} = (\mu I - T)(\lambda I - T)^{-1} = (\mu I - \lambda I + \lambda I - T)(\lambda I - T)^{-1}$$
$$= (\mu - \lambda)\cdot(\lambda I - T)^{-1} + I$$

Tj. $\text{„}I - ST^{-1}\text{"} = -(\mu - \lambda)(\lambda I - T)^{-1}$

$$\text{Tj. } (\mu I - T)^{-1} = (\lambda I - T)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\mu - \lambda)^n \left((\lambda I - T)^{-1}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\mu - \lambda)^n \left((\lambda I - T)^{-1}\right)^{n+1}$$

Tedy pro $x \in X$, $x^* \in X^*$:

$$x^*((\mu I - T)^{-1}x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^*\left(\left((\lambda I - T)^{-1}\right)^{n+1} x\right)\cdot(\mu - \lambda)^n,$$

což je vyjádření mocninnou řadou, je to tedy holomorfní funkce $\lrcorner$

(c) $\sigma(T)$ neprázdná kompaktní, $\sigma(T) \subset B(0, \|T\|)$

$\ulcorner$ $\sigma(T)$ uzavřená díky (a)

$\sigma(T) \subset B(0, \|T\|)$: $|\lambda| > \|T\| \Rightarrow \|\frac{T}{\lambda}\| < 1 \Rightarrow \overset{\lambda I - T}{\overset{\parallel}{\lambda(I - \frac{T}{\lambda})}}$ je invertibilní díky T29(a)

Tedy $\sigma(T)$ je omezená uzavřená, tudíž kompaktní.

$\sigma(T) \neq \emptyset$: Sporem. Nechť $\sigma(T) = \emptyset$, tj. $\varrho(T) = \mathbb{C}$.

Pro $|\lambda| > \|T\|$ je $(\lambda I - T)^{-1} = \lambda^{-1} (I - \frac{T}{\lambda})^{-1} =$

$$\overset{T29(a)}{=} \lambda^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$$

Tedy $\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T\|^n}{|\lambda|^{n+1}} = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|T\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \xrightarrow{\text{pro } |\lambda| \to \infty} 0$

Tedy pro každé $x \in X$ a $x^* \in X^*$ je

$\lambda \mapsto x^*((\lambda I - T)^{-1} x)$ funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ (díky (b)),

která má v ∞ limitu 0. Z Liouvilleovy věty (z Úvodu do komplexní analýzy) plyne, že je konstantní nulová.

Tj. $\forall x^* \, \forall x \, \forall \lambda \; : x^*((\lambda I - T)^{-1} x) = 0$

z H-B věty plyne $\forall x \, \forall \lambda : (\lambda I - T)^{-1} x = 0$

Tedy $\forall \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T)^{-1} = 0$, což je spor, protože 0 není inverzní operátor k ničemu. $\lrcorner$