III.6 Spektrum omezeného lineárního operátoru

Úmluva: V tomto oddíle jsou všechny Banachovy prostory komplexní.

Připomenutí: Nechť X je Banachův prostor a $T \in L(X)$.

- K T existuje inverzní zobrazení $T^{-1} : X \to X$, právě když T je prostý a na.
- Pokud T je prostý a na (tj., pokud existuje T^{-1}), pak již $T^{-1} \in L(X)$.
- Inverzní zobrazení je charakterizováno následovně: $S = T^{-1} \Leftrightarrow S \circ T = T \circ S = \mathrm{Id}_X$.

Definice. Nechť X je Banachův prostor a $T \in L(X)$. Operátor T se nazývá **invertibilní**, pokud existuje $S \in L(X)$, pro který $ST = TS = \mathrm{Id}_X$.

Poznámka: T je invertibilní, právě když je prostý a na, tj. právě když je to izomorfismus X na X. Operátor S z definice je jednoznačně určen a rovná se T^{-1}. Tedy, operátor T je invertibilní, právě když k němu existuje inverzní zobrazení.

Tvrzení 29. *Nechť X je Banachův prostor.*

(a) *Nechť $T \in L(X)$, $\|T\| < 1$. Pak operátor $\mathrm{Id}_X - T$ je invertibilní a platí*
$$(\mathrm{Id}_X - T)^{-1} = \mathrm{Id}_X + T + T^2 + T^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} T^n,$$
přičemž uvedená řada konverguje absolutně.

(b) *Nechť $S, T \in L(X)$, přičemž T je invertibilní a $\|S - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$. Pak S je invertibilní a platí $S^{-1} = T^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Id}_X - ST^{-1})^n$.*

Definice. Nechť X je Banachův prostor a $T \in L(X)$.

- **Rezolventní množinou** operátoru T rozumíme množinu $\rho(T)$ definovanou předpisem
$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \,\mathrm{Id}_X - T \text{ je invertibilní}\}.$$
- **Rezolventní funkcí** operátoru T rozumíme funkci
$$\lambda \mapsto (\lambda \,\mathrm{Id}_X - T)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(T).$$
Hodnotu rezolventní funkce v bodě λ obvykle značíme $R_\lambda(T)$.
- **Spektrem** operátoru T rozumíme množinu $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$, tj.
$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \,\mathrm{Id}_X - T \text{ není invertibilní}\}.$$
- **Vlastním číslem** operátoru T rozumíme každé $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že $\lambda \,\mathrm{Id}_X - T$ není prostý. Tj. takové $\lambda \in \mathbb{C}$, pro které existuje $x \in X \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ splňující $Tx = \lambda x$. Každé takové x se nazývá **vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu** λ. Množinu všech vlastních čísel operátoru T značíme $\sigma_p(T)$ a nazýváme **bodovým spektrem** operátoru T.

Věta 30. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in L(X)$. Pak platí:*

(a) *$\rho(T)$ je otevřená podmnožina $\mathbb{C}$.*

(b) *Pro každé $x \in X$ a $x^* \in X^*$ je funkce $\lambda \mapsto x^*((\lambda \,\mathrm{Id}_X - T)^{-1} x)$ holomorfní na množině $\rho(T)$.*

(c) *$\sigma(T)$ je neprázdná kompaktní podmnožina $\mathbb{C}$, jest $\sigma(T) \subset B(0, \|T\|)$.*

Poznámka: Komplexní funkce je na otevřené podmnožině $\mathbb{C}$ **holomorfní**, pokud lze v nějakém okolí každého bodu vyjádřit mocninnou řadou. (Více o těchto funkcích se vyučuje v kurzu Úvod do komplexní analýzy.) Tvrzení (b) pak snadno plyne z Tvrzení 29.

Větička 31. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in L(X)$. Pak $\sigma(T) = \sigma(T')$.*

Tvrzení 32. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in L(X)$. Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ jsou navzájem různá vlastní čísla a $x_1, \ldots, x_n \in X$ nějaké jim (po řadě) příslušné vlastní vektory. Pak jsou vektory $x_1, \ldots, x_n$ lineárně nezávislé.*