Tvrzení 37 H Hilbertův, $T \in \mathcal{L}(H)$ samoadjungovaný – Pak:

(i) $W(T) \subset \mathbb{R}$

$$\Big[\ x \in S(H) \Rightarrow \langle Tx, x\rangle \underset{T^* = T}{=} \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$$

$$\Rightarrow \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}\ \Big]$$

(ii) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$

$$\Big[\ \sigma(T) \underset{T\,3.6}{\subset} \overline{W(T)} \underset{(i)}{\subset} \mathbb{R}\ \Big]$$

(iii) λ_1, λ_2 dvě různá vlastní čísla, x_1, x_2 jim příslušné vlastní vektory $\Rightarrow x_1 \perp x_2$

$$\Big[\ \langle Tx_1, x_2\rangle \overset{T^*=T}{=} \langle x_1, Tx_2\rangle$$

$$\langle \lambda_1 x_1, x_2\rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2\rangle$$

$$\lambda_1 \langle x_1, x_2\rangle = \overline{\lambda_2} \langle x_1, x_2\rangle$$

$$\overline{\lambda_2} \overset{(ii)}{=} \lambda_2 \quad \Rightarrow \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_1 \langle x_1, x_2\rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2\rangle$$

Tedy $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle x_1, x_2\rangle = 0$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \langle x_1, x_2\rangle = 0, \text{ tj. } x_1 \perp x_2 \ \Big]$$

(iv) $\operatorname{Ker} T = (R(T))^{\perp}$

$\Big[\; x \in R(T)^{\perp} \iff \forall y \in H : \langle Ty, x\rangle = 0$

$\underset{T^*=T}{\Longleftrightarrow} \forall y \in H \; \langle y, Tx\rangle = 0 \iff Tx = 0$

$\Leftarrow$ jasné

$\Rightarrow$ aplikujme pro $y = Tx$

$\iff x \in \ker T \;\Big]$

(v) $m_T = \inf W(T)$, $M_T = \sup W(T)$. Pak $\|T\| = \max\{M_T, -m_T\}$

a $M_T, m_T \in \sigma(T)$

$\Big[$ Dle (i) je $W(T) \subset \mathbb{R}$. Zřejmě $W(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$,

tedy m_T a M_T jsou dobře definovány.

a navíc $-\|T\| \le m_T \le M_T \le \|T\|$,

tedy $\max\{M_T, -m_T\} \le \|T\|$

$C := \max\{M_T, -m_T\}$. Pak $\forall x \in H : |\langle Tx, x\rangle| \le C\|x\|^2$

Nechť $x \in H$, $\|x\| = 1$. Ukažme, že $\|Tx\| \le C$.

Pokud $Tx = 0$, je to jasné. Nechť $Tx \neq 0$. označme $\lambda := \sqrt{\|Tx\|}$

Pak $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T\lambda x, T(\tfrac{1}{\lambda}x)\rangle = \langle T(\lambda x), y\rangle$, kde $y := T(\tfrac{1}{\lambda}x)$

$\underset{\text{ověří se výpočtem s využitím } T^*=T}{=} \frac{1}{4}\left(\langle T(\lambda x + y), \lambda x + y\rangle - \langle T(\lambda x - y), \lambda x - y\rangle\right)$

rovnoběžníkové pravidlo

$\le \frac{C}{4}\left(\|\lambda x + y\|^2 + \|\lambda x - y\|^2\right) = \frac{C}{2}\left(\|\lambda x\|^2 + \|y\|^2\right)$

$= \frac{C}{2}\left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|Tx\|^2\right) = C \cdot \|Tx\|$ stačí vydělit $\|Tx\|$ a máme $\|Tx\| \le C$

Nakonec chceme ukázat, že $m_T, M_T \in \sigma(T)$.

Stačí ukázat, že v případě $0 \le m_T \le M_T$ platí $M_T \in \sigma(T)$.

Položme tedy
$$S_1 = T - m_T I$$
$$S_2 = M_T I - T$$

Pak
$$\sigma(S_1) = \sigma(T) - m_T$$
$$W(S_1) = W(T) - m_T, \text{ speciálně}$$
$$M_{S_1} = M_T - m_T$$
$$m_{S_1} = 0$$

Pokud tedy $M_{S_1} \in \sigma(S_1)$, pak i $M_T \in \sigma(T)$

Podobně
$$\sigma(S_2) = M_T - \sigma(T)$$
$$W(S_2) = M_T - W(T),$$
$$\text{speciálně } M_{S_2} = M_T - m_T$$
$$m_{S_2} = 0$$

Nechť tedy $0 \le m_T \le M_T$. Pak $\|T\| = M_T$ (už víme)

Najdeme $x_n \in S_H$, $\langle Tx_n, x_n \rangle \to M_T$

Pak
$$\|(M_T I - T)x_n\|^2 = \langle M_T x_n - Tx_n, M_T x_n - Tx_n \rangle =$$
$$= \langle M_T x_n, M_T x_n \rangle - \langle M_T x_n, Tx_n \rangle - \langle Tx_n, M_T x_n \rangle + \langle Tx_n, Tx_n \rangle$$
$$= M_T^2 - 2M_T \underbrace{\langle Tx_n, x_n \rangle}_{T^* = T} + \underbrace{\|Tx_n\|^2}_{\le \|T\|^2 = M_T^2}$$
$$\le 2M_T^2 - 2M_T \underbrace{\langle Tx_n, x_n \rangle}_{\to M_T} \to 0$$

$\Rightarrow M_T I - T$ není izomorfismus, tedy $M_T \in \sigma(T)$.