Věta IV.1.

(a) $f,g \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow f*g$ skoro všude definována, skoro všude konečná, $f*g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$

Dk: BÚNO f,g borelovské. Pak funkce $h(x,y)=f(y)g(x-y)$ je borelovská na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Ukážeme, že h je integrovatelná.

(*)

$$\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |h(x,y)|\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dx\,dy =$$

Fubiniova věta pro nezáporné funkce

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(y)|\,|g(x-y)|\,dx\right)dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\Big(|f(y)| \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d}|g(x-y)|\,dx}_{=\|g\|_1}\Big)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d}\left(|f(y)|\cdot\|g\|_1\right)dy =$$

$$= \|f\|_1\cdot\|g\|_1$$

(substituce „$x=y+z$")

Tedy: h je integrovatelná, proto podle Fubiniovy věty pro s.v. $x\in\mathbb{R}^d$ je $\int_{\mathbb{R}^d} h(x,y)\,dy$ konečný a funkce

$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} h(x,y)\,dy$ je integrovatelná. Ovšem $\int_{\mathbb{R}^d} h(x,y)\,dy = f*g(x)$

Tedy $f*g$ je s.v. konečná, $f*g\in L^1$. Navíc

$$\|f*g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |f*g(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d} h(x,y)\,dy\right|dx \le$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|h(x,y)|\,dy\,dx = \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|h(x,y)|\,dx\,dy \le \|f\|_1\cdot\|g\|_1$$

dle výpočtu (*)

(b) $*$ je komutativní, tj. $f*g = g*f$ platí vždy
(dle poznámek před větou)

Asociativita: $(f*g)*h = f*(g*h)$

$$(f*g)*h(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (f*g)(y)\, h(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\, g(y-z)\, dz \right) h(x-y)\, dy$$

$$\overset{(**)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \left(f(z) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y-z)\, h(x-y)\, dy \right) \right) dz = \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y-z)\, h(x-z-(y-z))\, dy \right) dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \cdot (g*h)(x-z)\, dz = f*(g*h)\ (x)$$
[substituce $\tilde{y} = y - z$]

Tento výpočet funguje díky Fubiniově větě pro ta $x \in \mathbb{R}^d$, pro které je funkce $(y, z) \longmapsto f(z)\, g(y-z)\, h(x-y)$ integrovatelná na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.
To ovšem platí pro s.v. $x \in \mathbb{R}^d$, díky Fubiniově větě, neboť funkce $(x, y, z) \longmapsto f(z)\, g(y-z)\, h(x-y)$ je integrovatelná na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, což plyne z výpočtu:

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |f(z)\, g(y-z)\, h(y-x)|\, dx\, dy\, dz = \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y-z)| \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} |h(y-x)|\, dx \right) dy \right) dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(|f(z)| \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y-z)| \cdot \|h\|_1 \right) dy \right) dz = \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)| \cdot \|g\|_1 \cdot \|h\|_1\, dz =$$

$$= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \cdot \|h\|_1$$

(další vlastnosti algebry, tj. $(f+g)*h = f*h + g*h$

a $(\lambda g)*h = g*(\lambda h) = \lambda (g*h)$ jsou snadné)

(c) $p \in [1,\infty]$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow f*g$ je skoro všude definovaná a konečná; navíc $f*g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $\|f*g\|_p \leq \|f\|_p \, \|g\|_1$

⌈ Nechť $q \in [1,\infty]$ je sdružený exponent ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$). Stačí ukázat: $f*g$ je s.v. konečná, měřitelná a pro každou $h \in L^q(\mathbb{R}^d)$, $\|h\|_q \leq 1$ platí, že $(f*g)\cdot h$ je integrovatelná a $\left|\int_{\mathbb{R}^d}(f*g)\cdot h\right| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_1$

<u>Výpočet</u> Nechť $h \in L^q(\mathbb{R}^d)$, $\|h\|_q \leq 1$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} (f*g)(x)\, h(x)\, dx\right| \overset{2}{=} \left|\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, dy\right) h(x)\, dx\right| =$$

$$\overset{1}{=} \left|\int_{\mathbb{R}^d} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, h(x)\, dx\right) dy\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \tau_y f(x)\cdot h(x)\, dx\right) dy\right|$$

$$\overset{3}{\leq} \int_{\mathbb{R}^d}\left(|g(y)| \cdot \left|\int_{\mathbb{R}^d} \tau_y f(x)\cdot h(x)\, dx\right| dy\right) \leq \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\, \|\tau_y f\|_p \, \|h\|_q \, dy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \cdot \|f\|_p \, dy = \|g\|_1 \cdot \|f\|_p$$

1 Plyne z Fubiniovy věty, pokud je funkce $(x,y) \mapsto g(y) f(x-y) h(x)$ je integrovatelná na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

($\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |g(y) f(x-y) h(x)|\, dx\, dy \leq \|g\|_1 \cdot \|f\|_p$ podobným výpočtem jako výše — vlastně stejným, jen jsou absolutní hodnoty již uvnitř, a použijeme Fubiniovu větu pro nezáporné funkce)

(2) To je jen přepis definice konvoluce. Přitom smysluplnost integrálu plyne z (1), zafixujme g a f. Víme, že pro s.v. $x \in \mathbb{R}^d$ je funkce

$$y \mapsto f(x-y)\, g(y)\, h(x) \text{ integrovatelná na } \mathbb{R}^d,$$

tedy pro s.v. $x \in \{z;\ h(z) \neq 0\}$ je integrovatelná i funkce $y \mapsto f(x-y)\, g(y)$, tj. pro takové x je $(f*g)(x)$ definovaná a konečná.

Tedy platí: $\forall h \in L^q(\mathbb{R}^d)$ pro s.v. $x \in \{z \in \mathbb{R}^d,\ h(z) \neq 0\}$ je $(f*g)(x)$ definovaná a konečná.

Protože charakteristická funkce $B(0,R)$ patří do $L^q(\mathbb{R}^d)$ pro každé $R>0$, dostáváme, že $f*g$ je s.v. definovaná a konečná.

Navíc máme, že $\forall h \in L^q(\mathbb{R}^d)$, je $(f*g)\cdot h$ měřitelná. Aplikací na $\chi_{B(0,R)}$, $R>0$ dostaneme, že $f*g$ je měřitelná na $B(0,R)$ pro každé $R>0$, tedy i na $\mathbb{R}^d$.

Tedy, opravdu $f*g$ je s.v. definovaná a konečná, navíc je měřitelná.

(3) To platí za předpokladu, že integrál vlevo konverguje, což víme z (1).