IV. Fourierova transformace

Úmluva: V této kapitole budeme symbolem $\|\boldsymbol{x}\|$ pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ označovat euklidovskou normu prvku $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$.

IV.1 Konvoluce funkcí na $\mathbb{R}^d$

Značení. Nechť $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{F}$ je funkce.

- Pro $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ definujme funkci $\tau_{\boldsymbol{y}} f$ (tzv. **posun** funkce f) vzorcem
$$(\tau_{\boldsymbol{y}} f)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$
- **Otočením** funkce f budeme rozumět funkci $\check{f}$ definovanou vzorcem
$$\check{f}(\boldsymbol{x}) = f(-\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Poznámka: Tyto operace mají smysl i pro funkce definované pouze na nějaké podmnožině $\mathbb{R}^d$. Pak definiční obor posunu bude patřičně posunutý definiční obor f a definiční obor otočení bude otočený definiční obor f.

Definice. Nechť $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{F}$ jsou měřitelné funkce. Jejich **konvolucí** $f * g$ rozumíme funkci definovanou předpisem
$$f * g(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}y$$
pro ta $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, pro která integrál existuje.

Poznámky:

- Existence ani hodnota uvedeného integrálu se nezmění, pokud f a g změníme na množině míry nula. Protože pro každou měřitelnou funkci f na $\mathbb{R}^d$ existuje borelovská funkce $\tilde{f}$ na $\mathbb{R}^d$, která se rovná f skoro všude, ve všech tvrzeních o konvoluci lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že zúčastněné funkce jsou borelovské.
- Ze symetrie a translační invariance Lebesgueovy míry plyne, že $f * g = g * f$ pro libovolné dvě měřitelné funkce f, g na $\mathbb{R}^d$.
- Konvoluci lze vyjádřit vzorcem $f * g(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \tau_{\boldsymbol{x}} \check{g}$.

Věta 1 (konvoluce funkcí z L^1 a L^p).

(a) *Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pak funkce $f * g$ je skoro všude definovaná a skoro všude konečná. Navíc $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.*

(b) *Operace $*$ je na $L^1(\mathbb{R}^d)$ komutativní a asociativní. Prostor $L^1(\mathbb{R}^d)$ opatřený navíc touto operací je komutativní algebra.*

(c) *Nechť $p \in [1, \infty]$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ a $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pak funkce $f * g$ je skoro všude definovaná a skoro všude konečná. Navíc $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ a*
$$\|f * g\|_p \le \|f\|_p \cdot \|g\|_1 .$$