I.2 Spojitá lineární zobrazení

Věta 11 (charakterizace spojitých lineárních zobrazení). *Nechť X a Y jsou normované lineární prostory nad týmž $\mathbb{F}$ a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(i) T *je spojité na* X.
(ii) T *je spojité v bodě* $\boldsymbol{o}$.
(iii) $T(B_X)$ *je omezená množina v* Y.
(iv) *Existuje takové* $C \geq 0$, *že pro každé* $x \in X$ *platí* $\|Tx\| \leq C \cdot \|x\|$.
(v) T *je lipschitzovské.*
(vi) T *je stejnoměrně spojité.*

Definice. Nechť X a Y jsou normované lineární prostory nad týmž $\mathbb{F}$.

- Je-li $T : X \to Y$ spojité lineární zobrazení, označme
$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|\,; x \in B_X\}.$$
Toto číslo nazýváme **normou lineárního zobrazení** T.
- Symbolem $L(X, Y)$ značíme vektorový prostor všech spojitých lineárních zobrazení $T : X \to Y$ opatřený normou definovanou v předchozím bodě. (Je to skutečně norma, takže dostaneme normovaný lineární prostor.)
- Místo $L(X, X)$ píšeme $L(X)$.
- Prostor $L(X, \mathbb{F})$ značíme X^* a nazýváme **duálním prostorem** (krátce **duálem**) prostoru X.

Větička 12 (vlastnosti normy lineárního zobrazení). *Nechť X a Y jsou normované lineární prostory nad týmž $\mathbb{F}$ a $T \in L(X, Y)$ je spojité lineární zobrazení.*

(a) $\|T\| = \sup\{\|Tx\|\,; x \in U_X\} = \sup\{\|Tx\|\,; x \in S_X\} = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}; x \in X \setminus \{\boldsymbol{o}\}\right\}$.
(b) $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ *pro* $x \in X$.
(c) $\|T\| = \min\{C \geq 0; \|Tx\| \leq C \cdot \|x\| \text{ pro } x \in X\}$
(d) *Je-li* Z *normovaný lineární prostor nad* $\mathbb{F}$ *a* $S \in L(Y, Z)$, *pak*
$$ST \in L(X, Z) \text{ a } \|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|\,.$$

Věta 13 (úplnost prostoru operátorů). *Nechť X a Y jsou normované lineární prostory nad týmž $\mathbb{F}$. Je-li Y úplný, pak i $L(X, Y)$ je úplný. Speciálně, X^* je vždy Banachův prostor.*

Definice. Nechť X a Y jsou normované lineární prostory nad týmž $\mathbb{F}$ a $T \in L(X, Y)$.

- T je **izometrie** (X do Y), pokud $\|Tx\| = \|x\|$ pro $x \in X$.
- T je **izomorfismus** (X do Y), pokud existují konstanty $c, d > 0$ takové, že
$$c\,\|x\| \leq \|Tx\| \leq d\,\|x\| \text{ pro } x \in X.$$

Poznámky:

- $T \in L(X,Y)$ je izomorfismus, právě když T je prosté a T^{-1} je spojité na $T(X)$.
- $T \in L(X,Y)$ je izomorfismus, právě když vzorec

$$\|x\|_T = \|Tx\|, \quad x \in X,$$

definuje ekvivalentní normu na X.
- Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ na X jsou ekvivalentní, právě když $\mathrm{Id} : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je izomorfismus.

Definice. Nechť X a Y jsou normované lineární prostory nad týmž $\mathbb{F}$.
- X a Y jsou **izometrické**, pokud existuje izometrie X na Y.
- X a Y jsou **izomorfní**, pokud existuje izomorfismus X na Y.

Větička 14 (úplnost je izomorfní vlastnost). *Nechť X a Y jsou izomorfní normované lineární prostory. Je-li X úplný, je i Y úplný.*

Tvrzení 15 (rozšíření operátoru na uzávěr). *Nechť X a Y jsou normované prostory nad týmž $\mathbb{F}$, přičemž Y je úplný a X_0 nechť je hustý podprostor X. Pak každé $T_0 \in L(X_0, Y)$ lze jediným způsobem rozšířit na $T \in L(X,Y)$. Pro toto rozšíření platí $\|T\| = \|T_0\|$.*

Věta 16 (zúplnění normovaného prostoru). *Nechť X je normovaný lineární prostor.*

(a) Existuje Banachův prostor $\widehat{X}$ a jeho hustý podprostor X_0 tak, že X_0 je izometrický X.

(b) Tato dvojice $(\widehat{X}, X_0)$ je jednoznačně určena. Přesněji: Pokud dvojice $(\widehat{X}, X_0)$ a $(\widehat{Y}, Y_0)$ mají vlastnosti z bodu (a), pak každou izometrii X_0 na Y_0 lze (jednoznačně) rozšířit na izometrii $\widehat{X}$ na $\widehat{Y}$.

Definice. Prostor $\widehat{X}$ z Věty 16 se nazývá **zúplněním** prostoru X. Obvykle ztotožňujeme X a X_0, tj. předpokládáme, že X je podprostorem $\widehat{X}$.

Poznámka: Zúplnění normovaného lineárního prostoru lze zkonstruovat podobným způsobem jako se konstruuje zúplnění metrického prostoru. Jiný důkaz bude proveden v oddílu II.2.

Definice. Nechť X je normovaný lineární prostor a $P \in L(X)$. Zobrazení P se nazývá **projekce** (nebo přesněji **spojitá projekce**), pokud $P^2 = P$.

Větička 17 (základní vlastnosti projekcí). *Nechť $P \in L(X)$ je projekce. Pak platí:*

(a) $\operatorname{Ker} P$ *a* $P(X)$ *jsou uzavřené podprostory* X.

(b) $\mathrm{Id} - P$ *je také projekce,* $(\mathrm{Id} - P)(X) = \operatorname{Ker} P$, $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - P) = P(X)$.

(c) Pro každé $x \in X$ existuje jediná dvojice prvků $y \in P(X)$ a $z \in \operatorname{Ker} P$ splňující $x = y + z$. Přitom $y = Px$ a $z = (\mathrm{Id} - P)x$.