

IV.3 Fourierova transformace a Schwartzův prostor

Značení a úmluva: Připomeňme, že λ^d značí Lebesgueovu míru na \mathbb{R}^d . Označme $m_d = (2\pi)^{-d/2}\lambda^d$. V tomto oddílu budeme prostorem $L^p(\mathbb{R}^d)$ rozumět prostor $L^p(m_d)$. Taktéž konvoluci budeme uvažovat vůči této míře, tj.

$$f * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y})g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dm_d(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y})g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Navíc, všechny prostory uvažujeme komplexní.

Definice. Necht $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. **Fourierovou transformací** funkce f nazýváme funkci \widehat{f} definovanou vzorcem

$$\widehat{f}(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})e^{-i\langle \mathbf{t}, \mathbf{x} \rangle} dm_d(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})e^{-i\langle \mathbf{t}, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d.$$

Poznámky:

- $\langle \mathbf{t}, \mathbf{x} \rangle$ značí standardní skalární součin \mathbf{t} a \mathbf{x} v \mathbb{R}^n . V literatuře se často značí $\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}$, my se přidržíme značení z první kapitoly.
- Pro $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$ definujme funkci $e_{\mathbf{t}}$ vzorcem $e_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) = e^{i\langle \mathbf{t}, \mathbf{x} \rangle}$ pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Tyto funkce se často nazývají **charaktery na \mathbb{R}^d** . Fourierova transformace lze jejich pomocí vyjádřit takto:

$$\widehat{f}(\mathbf{t}) = (f * e_{\mathbf{t}})(0) = \int_{\mathbb{R}^d} f \cdot e_{-\mathbf{t}} dm_d, \quad \text{pro } \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d \text{ a } f \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

- Každý charakter $e_{\mathbf{t}}$ je spojitá funkce splňující $|e_{\mathbf{t}}| = 1$ na \mathbb{R}^d . Odtud je zřejmé, že pro každé $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ je funkce \widehat{f} definovaná na \mathbb{R}^d a splňuje $\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$.

Tvrzení 8 (základní vlastnosti Fourierovy transformace). Necht $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $\mathbf{t}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$. Pak platí:

- $\widehat{\tau_{\mathbf{y}} f} = e_{-\mathbf{y}} \cdot \widehat{f}$.
- $\widehat{e_{\mathbf{y}} \cdot f} = \tau_{\mathbf{y}} \widehat{f}$.
- $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.
- Necht $\lambda > 0$ a $h(x) = f(\frac{x}{\lambda})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Pak $\widehat{h}(\mathbf{t}) = \lambda^d \widehat{f}(\lambda \mathbf{t})$ pro $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$.
- $\int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \widehat{g} dm_d = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} \cdot g dm_d$.
- Necht $j \in \{1, \dots, d\}$ a $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pak $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}(\mathbf{t}) = it_j \widehat{f}(\mathbf{t})$.
- Necht $j \in \{1, \dots, d\}$ a funkce $g(\mathbf{x}) = x_j f(\mathbf{x})$ patří do $L^1(\mathbb{R}^d)$, pak $\widehat{g} = i \frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}$.
- Funkce \widehat{f} je spojitá na \mathbb{R}^d .

Definice a značení:

- Pro $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$ a multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ označme $\mathbf{t}^{\alpha} = t_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot t_d^{\alpha_d}$. (Stejné značení budeme používat i pro $\mathbf{t} \in \mathbb{C}^d$.)
- **Polynomem na \mathbb{R}^d** rozumíme funkci P na \mathbb{R}^d tvaru

$$P(\mathbf{t}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq N} c_{\alpha} \mathbf{t}^{\alpha}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d,$$

kde $N \in \mathbb{N}_0$ a c_{α} , $\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq N$ jsou nějaká komplexní čísla (**koefficienty** polynomu P). Pokud navíc existuje multiindex α , pro který $|\alpha| = N$ a $c_{\alpha} \neq 0$, říkáme, že polynom P má **stupeň N** .

- Polynom na \mathbb{R}^d chápeme vždy jako funkci na \mathbb{R}^d , tj. jako funkci d reálných proměnných. Nicméně do takového polynomu lze zřejmým způsobem dosadit i prvky \mathbb{C}^d , což se bude občas hodit.
- Je-li P polynom na \mathbb{R}^d , označme symbolem \check{P} polynom na \mathbb{R}^d definovaný vzorcem $\check{P}(\mathbf{t}) = P(i\mathbf{t})$ pro $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$, tj. (je-li P výše uvedeného tvaru)

$$\check{P}(\mathbf{t}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq N} i^{|\alpha|} c_{\alpha} \mathbf{t}^{\alpha}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d.$$

- Je-li P polynom na \mathbb{R}^d výše uvedeného tvaru a f je funkce třídy \mathcal{C}^{∞} na \mathbb{R}^d , pak symbolem $P(D)f$ značíme funkci definovanou vzorcem

$$P(D)f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq N} c_{\alpha} D^{\alpha} f.$$

(Tato definice má smysl i pro funkce třídy \mathcal{C}^N .)

Důsledek 9. Necht' $N \in \mathbb{N}$.

- (a) Pokud $f \in C^N(\mathbb{R}^d)$ a pro každý multiindex α splňující $|\alpha| \leq N$ platí $D^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pak pro tyto multiindexy platí $\widehat{D^\alpha f}(\mathbf{t}) = i^{|\alpha|} \mathbf{t}^\alpha \widehat{f}(\mathbf{t})$ pro $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$.
- (b) Pokud pro každý polynom P na \mathbb{R}^d stupně nejvýše N platí $P \cdot f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pak \widehat{f} je třídy C^N a pro multiindex α splňující $|\alpha| \leq N$ platí $D^\alpha \widehat{f}(\mathbf{t}) = (-i)^{|\alpha|} (\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^\alpha f(\mathbf{x}))(\mathbf{t})$.

Lemma 10.

- (a) $D^\alpha e_{\mathbf{t}} = i^{|\alpha|} \mathbf{t}^\alpha e_{\mathbf{t}}$ pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.
- (b) Je-li P polynom na \mathbb{R}^d , pak $P(D)e_{\mathbf{t}} = \check{P}(\mathbf{t}) \cdot e_{\mathbf{t}}$.

Definice. Schwartzovým prostorem na \mathbb{R}^d rozumíme prostor funkcí

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \left\{ \begin{array}{l} f \in C^\infty(\mathbb{R}^d); \quad \text{funkce } \mathbf{x} \mapsto (1 + \|\mathbf{x}\|^2)^N D^\alpha f(\mathbf{x}) \\ \text{je omezená na } \mathbb{R}^d \\ \text{pro každé } N \in \mathbb{N}_0 \text{ a každý multiindex } \alpha \end{array} \right\}.$$

Nehrozí-li nedorozumění (tj., je-li d předem dáno), místo $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ píšeme jen \mathcal{S} .

Poznámka. Je-li g měřitelná funkce na $[0, \infty)$, pak platí

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(\|\mathbf{x}\|) d\mathbf{x} = d \cdot \lambda^d(B(\mathbf{o}, 1)) \cdot \int_0^\infty r^{d-1} g(r) dr,$$

má-li jedna strana smysl. Tento vzorec lze snadno dokázat, je-li g charakteristická funkce intervalu, s využitím regularity Lebesgueovy míry se dokáže pro charakteristické funkce měřitelných množin a dále se postupuje způsobem standardním v teorii míry. Z tohoto vzorce se snadno plyne, že

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1 + \|\mathbf{x}\|^2)^m} dm_d < \infty \text{ pro } m > \frac{d}{2}.$$

Věta 11 (vlastnosti Schwartzova prostoru a Fourierovy transformace na něm).

- (a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S} \subset C_0(\mathbb{R}^d) \cap \bigcap_{p \in [1, \infty]} L^p(\mathbb{R}^d)$.
- (b) Je-li $f \in \mathcal{S}$ a P je polynom na \mathbb{R}^d , pak

$$\widehat{P(D)f} = \check{P} \cdot \widehat{f}, \quad \widehat{P \cdot f} = \check{P}(D)\widehat{f}.$$

- (c) Fourierova transformace je lineární zobrazení \mathcal{S} do \mathcal{S} .

Důsledek 12. Fourierova transformace je spojitě lineární zobrazení prostoru $L^1(\mathbb{R}^d)$ do prostoru $C_0(\mathbb{R}^d)$, jehož norma je nejvýše 1.

Lemma 13. Uvažme funkci $\phi_d(\mathbf{x}) = e^{-\frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Pak platí $\phi_d \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $\widehat{\phi_d} = \phi_d$.

Věta 14 (věta o inverzi pro Schwartzův prostor).

- (a) Pro každé $f \in \mathcal{S}$ platí

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} \cdot e_{\mathbf{x}} dm_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\mathbf{t}) e^{i(\mathbf{t}, \mathbf{x})} d\mathbf{t}.$$

- (b) Fourierova transformace je lineární bijekce \mathcal{S} na \mathcal{S} . Navíc pro každé $f \in \mathcal{S}$ platí

$$\widehat{\widehat{f}} = \check{f}, \quad \widehat{\check{f}} = f.$$

Důsledek 15 (věta o inverzi pro případ integrovatelné \widehat{f}). Necht' $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ je taková, že $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pak pro skoro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ platí

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} \cdot e_{\mathbf{x}} dm_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\mathbf{t}) e^{i(\mathbf{t}, \mathbf{x})} d\mathbf{t}.$$

Poznámka: V důkazu Důsledku 15 se hodí následující pomocné tvrzení: $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $\int_{\mathbb{R}^d} fg = 0$ pro každé $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \implies f = 0$ skoro všude.

Tvrzení 16. Pro $f, g \in \mathcal{S}$ platí $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$. Speciálně, prostor \mathcal{S} je uzavřený na konvoluci.

Věta 17 (Plancherelova věta).

- (a) Pro každé $f \in \mathcal{S}$ platí $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.
- (b) Existuje právě jedna lineární izometrie \mathcal{P} prostoru $L^2(\mathbb{R}^d)$ na $L^2(\mathbb{R}^d)$ taková, že $\mathcal{P}(f) = \widehat{f}$ pro $f \in \mathcal{S}$.
- (c) Pro $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ platí $\mathcal{P}(f) = \widehat{f}$.