I.3 Prostory se skalárním součinem a Hilbertovy prostory

Definice. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$. **Skalárním součinem** na X rozumíme zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{F}$, které má následující vlastnosti:

(i) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ pro $x, y, z \in X$.

(ii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ pro $x, y \in X$ a $\lambda \in \mathbb{F}$.

(iii) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ pro $x, y \in X$.

(iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$ pro $x \in X$.

(v) Pro $x \in X$ platí $\langle x, x \rangle = 0$, právě když $x = \boldsymbol{o}$.

Dvojici $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nazýváme **prostor se skalárním součinem** nebo též **unitární prostor**. Je-li skalární součin dán, pak píšeme jen X místo $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Poznámky:

- Podmínky (i) a (ii) říkají, že zobrazení $x \mapsto \langle x, z \rangle$ je lineární pro každé $z \in X$.
- V případě $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ říkají podmínky (i)–(iii), že $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je symetrická bilineární forma, podmínky (iv) a (v) pak říkají, že tato forma je pozitivně definitní.
- V případě $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ plyne z podmínek (i)–(iii), že zobrazení $x \mapsto \langle z, x \rangle$ je **sdruženě lineární**, skalární součin je tedy pozitivně definitní hermiteovská seskvilineární forma.

Lemma 18 (Cauchy-Schwarzova nerovnost). *Nechť $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je prostor se skalárním součinem. Pak pro každé $x, y \in X$ platí*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Rovnost platí, právě když vektory x a y jsou lineárně závislé.

Tvrzení 19 (norma indukovaná skalárním součinem). *Nechť $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je prostor se skalárním součinem. Pro $x \in X$ položme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Pak $\|\cdot\|$ je norma na X.*

Poznámky:

(1) Norma definovaná v Tvrzení 19 se nazývá **norma indukovaná skalárním součinem**. Máme-li prostor se skalárním součinem, vždy na něm uvažujeme indukovanou normu, čímž se stává normovaným lineárním prostorem.

(2) Prostor se skalárním součinem, který je úplný v metrice indukované normou indukovanou skalárním součinem, se nazývá **Hilbertův prostor**.

Příklady 20. *Následující prostory jsou příklady Hilbertových prostorů:*

(1) *$X = \mathbb{F}^n$ se skalárním součinem*

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{F}^n.$$

(2) *$X = L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ se skalárním součinem*

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f \overline{g} \, \mathrm{d}\mu, \quad f, g \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu).$$

(3) $X = \ell^2$ *se skalárním součinem*

$$\langle (x_k)_k, (y_k)_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}, \quad (x_k)_k, (y_k)_k \in \ell_2.$$

Tvrzení 21 (polarizační identita).

(a) Nechť $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je reálný prostor se skalárním součinem a $\|\cdot\|$ je norma indukovaná skalárním součinem. Pak platí

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right) \quad \text{pro } x, y \in X.$$

(b) Nechť $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je komplexní prostor se skalárním součinem a $\|\cdot\|$ je norma indukovaná skalárním součinem. Pak platí

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2 \right) \quad \text{pro } x, y \in X.$$

Důsledek 22.

- *Je-li X prostor se skalárním součinem, pak skalární součin je spojitý jako zobrazení $X \times X \to \mathbb{F}$.*
- *Je-li $(X, \|\cdot\|)$ normovaný lineární prostor, pak existuje nejvýše jeden skalární součin na X, který indukuje normu $\|\cdot\|$.*

Tvrzení 23 (rovnoběžníkové pravidlo). *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\|\cdot\|$ je jím indukovaná norma. Pak platí*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \text{pro } x, y \in X.$$

Věta 24 (Jordan – von Neumann). *Nechť X je normovaný lineární prostor, jehož norma splňuje rovnoběžníkové pravidlo (tj. rovnost z Tvrzení 23). Pak je norma generovaná nějakým skalárním součinem na X. (Tento skalární součin je jednoznačně určen vzorcem z Tvrzení 21.)*

Důsledek 25. *Zúplněním prostoru se skalárním součinem je Hilbertův prostor.*

Poznámka. Věta 24 platí i za slabších předpokladů. Stačí předpokládat, že X je vektorový prostor a $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ je takové zobrazení, že pro každé $x, y \in X$ platí:

- $\|x\| > 0$ pro $x \in X \setminus \{\boldsymbol{o}\}$.
- $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ pro $x, y \in X$.
- Pro každé $x \in X$ je funkce $t \mapsto \|tx\|$ spojitá na $\mathbb{R}$.
- Je-li X komplexní, pak $\|ix\| = \|x\|$ pro $x \in X$.

Pak již $\|\cdot\|$ je norma generovaná skalárním součinem.