I.4 Řady v normovaných lineárních prostorech

Definice. Nechť X je normovaný lineární prostor a (x_n) posloupnost prvků X. Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je

- **konvergentní**, je-li posloupnost částečných součtů $(\sum_{k=1}^{n} x_k)_n$ konvergentní v prostoru X, její limitu pak nazýváme **součtem** řady;
- **absolutně konvergentní**, je-li číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ konvergentní;
- **bezpodmínečně konvergentní**, pokud každé její přerovnání je konvergentní. (**Přerovnáním** uvedené řady rozumíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$, kde π je nějaká permutace množiny $\mathbb{N}$.)

Poznámky:

(1) Pokud je řada bezpodmínečně konvergentní, pak všechna přerovnání mají týž součet.

(2) Řada reálných (nebo komplexních) čísel je absolutně konvergentní, právě když je bezpodmínečně konvergentní.

Tvrzení 26 (úplnost a konvergence řad). *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak X je úplný, právě když každá absolutně konvergentní řada v X je konvergentní.*

Je-li X úplný, pak každá absolutně konvergentní řada je dokonce bezpodmínečně konvergentní.

Poznámky:

(1) Je-li X Banachův prostor konečné dimenze, pak každá bezpodmínečně konvergentní řada v X je absolutně konvergentní. (Pro $\mathbb{F}^n$ s některou z norem z Příkladu 2 to plyne z Riemannovy věty a v oddílu I.6 ukážeme, že každý prostor konečné dimenze je izomorfní prostoru $\mathbb{F}^n$, kde n je jeho dimenze.)

(2) Je-li X Banachův prostor nekonečné dimenze, pak v X existuje bezpodmínečně konvergentní řada, která není absolutně konvergentní. To říká netriviální věta dokázaná A. Dvoretzkym a C.A. Rogersem v roce 1950.

Tvrzení 27 (charakterizace bezpodmínečné konvergence). *Nechť X je normovaný lineární prostor a (x_n) posloupnost prvků X. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je bezpodmínečně konvergentní a má součet $x \in X$, právě když platí*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists F_0 \subset \mathbb{N} \text{ konečná } \forall F \subset \mathbb{N} \text{ konečnou},\ F \supset F_0 : \left\| x - \sum_{n \in F} x_n \right\| < \varepsilon.$$

Definice. Nechť J je neprázdná množina, X normovaný lineární prostor a $x_j \in X$ pro každé $j \in J$.

- Symbol $\sum_{j \in J} x_j$ nazýváme (**zobecněnou**) **řadou** v X.
- Prvek $x \in X$ nazveme **součtem** této řady, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists F_0 \subset J \text{ konečná } \forall F \subset J \text{ konečnou, } F \supset F_0 : \left\| x - \sum_{j \in F} x_j \right\| < \varepsilon.$$

  Pokud má řada součet, říkáme, že je (**bezpodmínečně**) **konvergentní**.
- Uvedená řada je **absolutně konvergentní**, pokud konverguje číselná zobecněná řada $\sum_{j \in J} \|x_j\|$, tj. pokud

$$\sup_{F \subset J \text{ konečná}} \sum_{j \in F} \|x_j\| < \infty.$$

Pokud $J = \emptyset$, klademe $\sum_{j \in J} x_j = \boldsymbol{o}$.

Poznámka. Každá řada má nejvýše jeden součet.

Tvrzení 28 (nutná podmínka konvergence). *Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li řada $\sum_{j \in J} x_j$ konvergentní v X, platí $(\|x_j\|)_{j \in J} \in c_0(J)$.*

Tvrzení 29 (vlastnosti řad v Banachových prostorech). *Nechť X je Banachův prostor a $\sum_{j \in J} x_j$ je řada v X.*

(a) (Bolzano-Cauchyova podmínka) *Tato řada je konvergentní, právě když platí*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists F_0 \subset J \textit{ konečná } \forall F \subset J \textit{ konečnou, } F \cap F_0 = \emptyset : \left\| \sum_{j \in F} x_j \right\| < \varepsilon.$$

(b) Je-li $\sum_{j \in J} x_j$ absolutně konvergentní, je i konvergentní.

(c) Je-li $\sum_{j \in J} x_j$ konvergentní, pak $\sum_{j \in J'} x_j$ je konvergentní pro každou $J' \subset J$.

Poznámka: Řada $\sum_{j \in J} x_j$ v normovaném lineárním prostoru konverguje k prvku x, právě když platí následující podmínky:

- $J_0 = \{j \in J; x_j \neq \boldsymbol{o}\}$ je (nejvýše) spočetná.
- Je-li J_0 konečná, pak $x = \sum_{j \in J_0} x_j$.
- Je-li J_0 nekonečná, pak pro každé očíslování $J_0 = \{j_k; k \in \mathbb{N}\}$ platí $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_{j_k}$.