X vektorový prostor, $U \subset X$ konvexní, $0 \in U$

- U je <u>pohlcující</u>, pokud $\forall x \in X \ \exists t > 0 : tx \in U$

[Pozn: U je konvexní a $0 \in U$. Pokud $t > 0$ a $tx \in U$, pak celá úsečka $[0, tx]$ patří do U, a tedy $\forall s \in [0,t] : sx \in U$]

- Je-li U pohlcující, definujeme Minkowského funkcionál

$$p_U(x) = \inf\{t > 0;\ x \in tU\}, \quad x \in X$$
$$= \inf\{t > 0;\ \tfrac{1}{t}x \in U\}$$

[Poznámky: • U pohlcující $\Rightarrow$ ta množina je neprázdná, a tedy $p_U(x) \in [0, +\infty)$ je dobře def.

- $p_U(0) = 0$
- $x \in X \setminus \{0\} \Rightarrow$ jsou dvě možnosti:
  (a) celá polopřímka $P_x = \{tx,\ t \in [0,\infty)\}$ je obsažena v U, pak $p_U(x) = 0$
  (b) $P_x \not\subset U$. Pak $P_x \cap U$ je úsečka, jeden krajní bod je 0, druhý sx pro nějaké $s > 0$ (ten může a nemusí patřit do U)

  Pak $p_U(x) = \frac{1}{s}$

  [$t > \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{1}{t} < s \Rightarrow \frac{1}{t}x \in U$
  $t < \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{1}{t} > s \Rightarrow \frac{1}{t}x \notin U$]

]

Lemma 1 X vektorový prostor, $U \subset X$ konvexní, $0 \in U$

(a) U pohlcující $\Rightarrow$ p_U je sublineární funkcionál

Γ víme, že p_U je dobře definovaný

- $x \in X$, $s > 0$ $\Rightarrow$ $p_U(sx) = s \cdot p_U(x)$:

$$p_U(x) = \inf \overbrace{\{t > 0, \ \tfrac{x}{t} \in U\}}^{A}$$

$$p_U(sx) = \inf \underbrace{\{t > 0; \ \tfrac{sx}{t} \in U\}}_{B}$$

Pak $t \in A \Leftrightarrow \frac{x}{t} \in U \Leftrightarrow \frac{sx}{st} \in U \Leftrightarrow st \in B$

Tedy $B = s \cdot A$, a proto $\inf B = s \cdot \inf A$,
neboli $p_U(sx) = s \cdot p_U(x)$

- $x, y \in X \Rightarrow p_U(x+y) \leq p_U(x) + p_U(y)$:

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{x}{p_U(x)+\varepsilon} \in A, \quad \frac{y}{p_U(y)+\varepsilon} \in A$$

A je konvexní $\Rightarrow$

$$\underbrace{\frac{p_U(x)+\varepsilon}{p_U(x)+p_U(y)+2\varepsilon} \cdot \frac{x}{p_U(x)+\varepsilon} + \frac{p_U(y)+\varepsilon}{p_U(x)+p_U(y)+2\varepsilon} \cdot \frac{y}{p_U(y)+\varepsilon}}_{\frac{x+y}{p_U(x)+p_U(y)+2\varepsilon}} \in A$$

tedy $p_U(x+y) \leq p_U(x) + p_U(y) + 2\varepsilon$

ε libovolné $\Rightarrow p_U(x+y) \leq p_U(x) + p_U(y)$ $\lrcorner$

(b) U pohlcující a absolutně konvexní

$\Rightarrow$ p_U je pseudonorma

Γ absolutně konvexní = konvexní a navíc

$\forall x \in U\ \forall \lambda \in \mathbb{F},\ |\lambda| \le 1 \Rightarrow \lambda x \in U$

Z (a) už víme, že p_U je sublineární. Stačí tedy dokázat, že $p_U(\lambda x) = |\lambda|\, p_U(x)$ pro $x \in X$ a $\lambda \in \mathbb{F}$

Nechť nejprve $|\lambda| = 1$. Chceme $p_U(\lambda x) = p_U(x)$

Jest: $p_U(x) = \inf \{ t > 0;\ \frac{x}{t} \in U \}$

$p_U(\lambda x) = \inf \{ t > 0;\ \frac{\lambda x}{t} \in U \}$

Přitom $\frac{x}{t} \in U \Rightarrow \frac{\lambda x}{t} \in U$ $\quad (|\lambda| = 1)$

$$\frac{\lambda x}{t} \in U \Rightarrow \frac{\bar{\lambda} \lambda x}{t} \in U \quad (|\bar{\lambda}| = 1)$$

$$\frac{\bar{\lambda} \lambda x}{t} = \frac{x}{t} \quad (\bar{\lambda}\lambda = |\lambda|^2 = 1)$$

Tedy $\frac{x}{t} \in U \Leftrightarrow \frac{\lambda x}{t} \in U$ $\Rightarrow$ tyto dvě množiny jsou stejné, infima jsou stejná.

Obecně: pro $\lambda = 0$ je to jasné

$\lambda \neq 0$ $\quad p_U(\lambda x) = p_U\left(|\lambda| \cdot \frac{\lambda}{|\lambda|} x\right) =$

$$\underset{(a)}{=} |\lambda| \cdot p_U\left(\frac{\lambda}{|\lambda|} x\right) \underset{\text{případ } „|\lambda| = 1"}{=} |\lambda|\, p_U(x) \quad \lrcorner$$

(c) $0 \in \operatorname{Int} U \Rightarrow p_U$ je Lipschitzovský

$0 \in \operatorname{Int} U \Rightarrow \exists\, r > 0 : r \cdot B_X \subset U$

Tedy pro $x \in X,\ x \neq 0$: $\frac{x}{\|x\|} \cdot r \in rB_X \subset U$

$$\Rightarrow p_U(x) \leq \frac{1}{r}\|x\|$$

Pro $x = 0$ $p_U(0) = 0 \leq \frac{1}{r}\|0\|$

Nyní $x, y \in X$

$$\Rightarrow p_U(x) \leq p_U(x-y) + p_U(y)$$

$$\Rightarrow p_U(x) - p_U(y) \leq p_U(x-y) \leq \frac{1}{r}\|x-y\|$$

podobně $p_U(y) - p_U(x) \leq \frac{1}{r}\|y-x\|$

$\Rightarrow p_U$ je $\frac{1}{r}$ – Lipschitzovský