Appendix 1: **Množiny první a druhé kategorie, Baireova věta**

Nechť (M, d) je metrický prostor a $A \subset M$ jeho podmnožina. Říkáme, že množina A je

- **řídká** v M, pokud její uzávěr má prázdný vnitřek, tj. pokud $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset$;
- **první kategorie** v M, pokud je sjednocením spočetně mnoha množin řídkých v M, tj. pokud existuje posloupnost (A_n) řídkých podmnožin M taková, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$;
- **druhé kategorie** v M, pokud není první kategorie v M.

Poznámky:

(1) Žádný neprázdný metrický prostor není řídký sám v sobě.

(2) Neprázdný metrický prostor může být první kategorie sám v sobě. (Například $\mathbb{Q}$ jakožto podprostor $\mathbb{R}$.)

Baireova věta o kategorii. *Nechť (M, d) je úplný metrický prostor a (G_n) posloupnost otevřených hustých podmnožin M. Pak $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ je hustá v M.*

Náznak důkazu: Nechť $U \subset M$ je neprázdná otevřená množina. Dokážeme, že obsahuje bod průniku $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Indukcí zkonstruujeme posloupnost (x_n) bodů M a posloupnost kladných reálných čísel (r_n) takto:

(i) $x_1 \in U \cap G_1$, $U(x_1, 2r_1) \subset U \cap G_1$, $r_1 < 1$;

(ii) $x_{n+1} \in U(x_n, r_n) \cap G_{n+1}$, $U(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset U(x_n, r_n) \cap G_{n+1}$, $r_{n+1} < \frac{1}{n+1}$.

Pak posloupnost (x_n) je cauchyovská a její limita leží v průniku $U \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$.

Ekvivalentní formulace Baireovy věty 1. *Nechť (M, d) je úplný metrický prostor a $A \subset M$ je množina první kategorie v M. Pak A má prázdný vnitřek.*

Ekvivalentní formulace Baireovy věty 2. *Nechť (M, d) je úplný metrický prostor a $U \subset M$ je neprázdná otevřená množina. Pak U je druhé kategorie v M.*

Ekvivalentní formulace Baireovy věty 3. *Nechť (M, d) je úplný metrický prostor a $U \subset M$ je neprázdná otevřená množina. Nechť (A_n) je posloupnost podmnožin M taková, že $U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že množina A_n není řídká v M.*