I. Normy lineárních funkcionálů a operátorů

1. Nechť c_{00} označuje vektorový prostor všech číselných posloupností, které jsou od jistého indexu konstantně nulové. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ Definujme na c_{00} lineární funkcionál φ_α předpisem

$$\varphi_\alpha((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha x_n.$$

Pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ a $p \in [1,\infty]$ je funkcionál φ_α spojitý na $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$?

2. Ukažte, že $\varphi : X \to \mathbb{F}$ je spojitý lineární funkcionál, spočtěte jeho normu a najděte množinu všech bodů na sféře prostoru X, v nichž φ své normy nabývá (a rozhodněte, zda je neprázdná), jestliže

a) $X = \ell^1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty x_n$; b) $X = \ell^1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty x_{2n}$;
c) $X = \ell^1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n x_n$; d) $X = \ell^1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} x_n$;
e) $X = \ell^1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty (1-\frac{1}{n}) x_{2n}$; f) $X = c_0$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} x_n$;
g) $X = \ell^\infty$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} x_n$; h) $X = \ell^2$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} x_n$;
i) $X = \ell^p$ (kde $p \in (1,\infty)$), $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} x_n$; j) $X = \mathcal{C}([0,1])$, $\varphi(f) = f(0)$;
k) $X = \mathcal{C}([0,1])$, $\varphi(f) = f(0) - f(1)$; l) $X = \mathcal{C}([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 f$; m) $X = \mathcal{C}([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f$;
n) $X = \mathcal{C}([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$; o) $X = \mathcal{C}([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t-\frac{1}{2}) f(t)\,\mathrm{d}t$;
p) $X = L^\infty([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f$; q) $X = L^\infty([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$;
r) $X = L^\infty([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t-\frac{1}{2}) f(t)\,\mathrm{d}t$; s) $X = L^1([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f$;
t) $X = L^1([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$; u) $X = L^1([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t-\frac{1}{2}) f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Ukažte, že $T : X \to Y$ je spojitý lineární operátor, spočtěte jeho normu a najděte množinu všech bodů $x \in S_X$, v nichž $\|Tx\| = \|T\|$ (a rozhodněte, zda je neprázdná), jestliže

a) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, \dots)$; b) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$;
c) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots)$;
d) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (x_1 - x_2, x_2 - 2x_1, x_3, x_4, \dots)$; e) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (0, x_2, 0, x_4, \dots)$;
f) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (\frac{x_n}{n})_{n=1}^\infty$; g) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (\frac{n+1}{n} x_n)_{n=1}^\infty$;
h) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (\frac{n}{n+1} x_n)_{n=1}^\infty$; i) $X = \ell^1$, $Y = \ell^\infty$, $T((x_n)) = (x_1 + \dots + x_n)_{n=1}^\infty$;
j) $X = \ell^1$, $Y = \ell^\infty$, $T((x_n)) = (\sum_{k=n}^\infty x_k)_{n=1}^\infty$; k) $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f) = f + f(1) - f(0)$;
l) $X = Y = \mathcal{C}([0,r])$, kde $r > 0$, $T(f)(t) = \int_0^t f$; m) $X = Y = \mathcal{C}([0,r])$, kde $r > 0$, $T(f)(t) = t f(t)$;
n) $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f)(t) = (t - \frac{1}{2}) f(t)$; o) $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f)(t) = f(1-t)$;
p) $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f)(t) = f(t^2)$; q) $X = Y = \mathcal{C}([-1,1])$, $T(f)(t) = f(t^2)$;
r) $X = \mathcal{C}([0,r])$ a $Y = \mathcal{C}^1([0,r])$, kde $r > 0$, $T(f)(t) = \int_0^t f$;
s) $X = \mathcal{C}^1([0,r])$ a $Y = \mathcal{C}([0,r])$, kde $r > 0$, $T(f) = f'$;
t) $X = \mathcal{C}^1([0,1])$ a $Y = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f) = f' - f$;
u) $X = \mathcal{C}^2([0,1])$ a $Y = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f) = f'' + f$;
v) $X = Y = L^p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty]$, $T(f)(t) = f(\sqrt{t})$;
w) $X = Y = L^p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty]$, $T(f)(t) = t f(t)$;
x) $X = Y = L^p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty]$, $T(f)(t) = (t - \frac{1}{2}) f(t)$;
y) $X = Y = L^p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty]$, $T(f) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} \cdot f$;
z) $X = Y = L^p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty]$, $T(f) = (\chi_{[0,\frac{1}{2}]} - \chi_{(\frac{1}{2},1]}) \cdot f$.

4. Pro operátory T z předchozího příkladu zodpovězte následující otázky:
(i) Je operátor T prostý? Pokud ne, zjistěte jeho jádro.
(ii) Je operátor T na?
(iii) Je operátor T izometrie, případně izomorfismus?
(iv) Je-li T izometrie nebo izomorfismus, popište jeho obor hodnot.
(v) Je-li operátor T izomorfismus, spočtěte normu inverzního operátoru.

Výsledky a návody. **1.** φ_α je spojitý na $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$, právě když $\alpha q < -1$, kde $q \in [1, \infty]$ splňuje $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Návod pro případ $p \in (1, \infty)$: Pokud $\alpha q < -1$, pak z Hölderovy nerovnosti plyne, že $\|\varphi_\alpha\| \le (\sum_{n=1}^\infty n^{\alpha q})^{1/q}$. Pokud $\alpha q \ge -1$, uvažme $x_n = (1, \frac{1}{2^{\alpha+1}}, \dots, \frac{1}{n^{\alpha+1}}, 0, 0, \dots)$. Pak $\varphi_\alpha(x_n) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \to \infty$. Je-li dokonce $\alpha q > -1$, je posloupnost (x_n) $\|\cdot\|_p$-omezená, z čehož plyne nespojitost φ_α. V mezním případě $\alpha q = -1$ dostaneme $\|x_n\| = (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n})^{1/p}$, a tedy $\varphi(x_n)/\|x_n\| \to \infty$ a $\varphi_\alpha(x_n) \to \infty$. (Případy $p = 1$ a $p = \infty$ lze zdůvodnit podobně, a to jednodušeji.) **2.** a) $\|\varphi\| = 1$, této hodnoty φ nabývá ve všech bodech sféry, které mají nezáporné souřadnice. b) $\|\varphi\| = 1$, nabývá se v těch bodech sféry, které mají nezáporné souřadnice a které mají souřadnice s lichým indexem nulové. c) $\|\varphi\| = 1$, nabývá se ve všech bodech sféry, jejichž souřadnice se sudým indexem jsou nezáporné a s lichým indexem sjou záporné. d) $\|\varphi\| = 1$, nabývá se v bodě $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$. e) $\|\varphi\| = 1$, nenabývá se. Pro důkaz $\|\varphi\| \ge 1$ uvažte kanonické bázové vektory e_n. Při důkazu nenabývání lze postupovat takto: Nechť $(x_n) \in S_{\ell^1}$. Nechť $k \in \mathbb{N}$ je nejmenší index, pro který $x_k \ne 0$. Pak ukažte, že $|\varphi((x_k))| \le 1 - \frac{1}{k}|x_k| < 1$. f) $\|\varphi\| = \frac{\pi^2}{6}$, nenabývá se. Pro důkaz $\|\varphi\| \ge \frac{\pi^2}{6}$ uvažte vektory $(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$. Při důkazu nenabývání lze postupovat takto: Nechť $(x_n) \in S_{c_0}$. Zvolme $m \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \ge m$ je $|x_n| < \frac{1}{2}$. Pak ukažte, že $|\varphi(x)| \le \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=m}^\infty \frac{1}{n^2} < \frac{\pi^2}{6}$. g) $\|\varphi\| = \frac{\pi^2}{6}$, nabývá se v bodě $(1, 1, 1, 1, \dots)$. h) $\|\varphi\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$, nabývá se v bodě $(\frac{\sqrt{6}}{\pi n})_{n=1}^\infty$. (Použijte Cauchyovu nerovnost.) i) $\|\varphi\| = (\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^q})^{1/q}$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nabývá se v bodě $(\frac{1}{n^{q-1}(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^q}{}^p)})_{n=1}^\infty$. (Použijte Hölderovu nerovnost.) j) $\|\varphi\| = 1$, nabývá se v každé $f \in \mathcal{C}([0,1])$ splňující $|f| \le 1$ a $f(0) = 1$. k) $\|\varphi\| = 2$, nabývá se v každé $f \in \mathcal{C}([0,1])$ splňující $|f| \le 1$, $f(0) = 1$ a $f(1) = -1$. Příkladem takové funkce je $f(x) = 1 - 2x$ (a spousta dalších funkcí). l) $\|\varphi\| = 1$, nabývá se právě ve funkci konstantně rovné 1. (Pokud $|f| \le 1$ a v nějakém bodě $x \in [0,1]$ je $f(x) < 1$, pak díky spojitosti f existuje $\varepsilon > 0$ nedegenerovaný interval $(\alpha, \beta) \subset [0,1]$ tak, že platí $f \le 1 - \varepsilon$ na (α, β). Pak $\varphi(f) \le 1 - \varepsilon(\beta - \alpha) < 1$. V komplexním případě je to podobné, i když trochu složitější: Pokud $f(x) \ne 1$, existuje $\varepsilon > 0$ nedegenerovaný interval $(\alpha, \beta) \subset [0,1]$ tak, že platí $|1 - f| > \varepsilon$ na (α, β). Pak $|1 - \varphi(f)| \ge \varepsilon(\beta - \alpha) > 0$.) m) $\|\varphi\| = \frac{1}{2}$, nabývá se ve všech funkcích $f \in \mathcal{C}([0,1])$, které splňují $|f| \le 1$ a $f = 1$ na $[0, \frac{1}{2}]$. n) $\|\varphi\| = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}$, nabývá se právě ve funkci konstantně rovné 1. (Lze zdůvodnit podobně jako v příkladu l).) o) $\|\varphi\| = \int_0^1 |t - \frac{1}{2}| \, dt = \frac{1}{4}$, nenabývá se. Pro důkaz $\|\varphi\| \ge \frac{1}{4}$ sestrojte funkce $f_n \in \mathcal{C}([0,1])$ pro $n \ge 3$, které splňují $|f_n| \le 1$, $f_n = -1$ na $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$ a $f_n = 1$ na $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$. Při důkazu nenabývání lze postupovat takto: Nechť $f \in \mathcal{C}([0,1])$, $|f| \le 1$. Podle hodnoty v bodě $\frac{1}{2}$ rozlišíme dva případy: $f(\frac{1}{2}) \ge 0$ a $f(\frac{1}{2}) \le 0$. Nechť $f(\frac{1}{2}) \le 0$. Pak existuje $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, že na intervalu $(\alpha, \frac{1}{2})$ platí $f < \frac{1}{2}$. Pak $\varphi(f) \le \int_0^1 |t - \frac{1}{2}| \, dt - \frac{1}{2} \int_\alpha^{1/2} |t - \frac{1}{2}| \, dt < \frac{1}{4}$. Případ $f(\frac{1}{2}) \ge 0$ se ošetří analogicky. V komplexním případě lze postupovat podobně - rozlišíme, zda $\operatorname{Re} f(\frac{1}{2}) \ge 0$ nebo $\operatorname{Re} f(\frac{1}{2}) \le 0$ (spočtěte podrobně). p) $\|\varphi\| = \frac{1}{2}$, nabývá se ve všech funkcích $f \in L^\infty([0,1])$, které splňují $|f| \le 1$ a $f = 1$ na $[0, \frac{1}{2}]$ (ve smyslu skoro všude). q) $\|\varphi\| = \frac{1}{2}$, nabývá se právě ve funkci skoro všude rovné 1. r) $\|\varphi\| = \frac{1}{4}$, nabývá se právě ve funkci $\chi_{[0,\frac{1}{2})} - \chi_{(\frac{1}{2},1]}$. s) $\|\varphi\| = 1$, nabývá se ve funkcích s vlastnostmi: $f \ge 0$ a $f = 0$ na $(\frac{1}{2}, 1]$ (v obou případech skoro všude) a $\int_0^{1/2} f = 1$. Příkladem takové funkce je $2\chi_{[0,\frac{1}{2}]}$ (a řada dalších). t) $\|\varphi\| = 1$, nenabývá se. Pro důkaz $\|\varphi\| \ge 1$ uvažte funkce $f_n = n\chi_{[1-\frac{1}{n},1]}$. Při důkazu nenabývání lze postupovat takto: Nechť $f \in B_{L^1([0,1])}$. Pak $\lim_{x \to 1-} \int_x^1 |f| = 0$, zvolme tedy $x \in (0,1)$, aby $\int_x^1 |f| < \frac{1}{2}$. Pak $|\varphi(f)| \le x \int_0^x |f| + \int_x^1 |f| = x + (1-x) \int_x^1 |f| \le x + \frac{1}{2}(1-x) < 1$. u) $\|\varphi\| = \frac{1}{2}$, nenabývá se. Pro důkaz $\|\varphi\| \ge 1$ uvažte funkce $f_n = n\chi_{[1-\frac{1}{n},1]}$. Při důkazu nenabývání lze postupovat podobně jako v případě t), jen se zvolí $x \in (0, \frac{1}{2})$, aby $\int_0^x |f| + \int_{1-x}^1 |f| < \frac{1}{2}$. **3.** + **4.** a) $\|T\| = 1$, norma se nabývá v každém bodě S_{ℓ^2}. T je izometrie do, obor hodnot je $\{(x_n); x_1 = 0\}$. b) $\|T\| = 1$, norma se nabývá v těch $(x_n) \in S_{\ell^2}$, které splňují $x_1 = 0$. T není prostý, $\ker T = \operatorname{span}\{e_1\}$, tj. body, které mají všechny souřadnice až na první nulové. T je na. c) T je izometrie na. d) T je izomorfismus na, $T^{-1}((x_n)) = (-x_1 - x_2, -2x_1 - x_2, x_3, x_4, \dots)$. $\|T\| = \|T^{-1}\| = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Norma $\|T\|$ se nabývá v bodech $\pm(\frac{1}{10}\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}, \frac{1}{20}(1 +$

$\sqrt{5})\sqrt{50-10\sqrt{5}},0,0,\dots)$ a $\pm(\frac{1}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}},\frac{1}{20}(1-\sqrt{5})\sqrt{50+10\sqrt{5}},0,0,\dots)$. Norma $\|T^{-1}\|$ se nabývá v bodech $\pm(\frac{1}{10}\sqrt{50-10\sqrt{5}},-\frac{1}{20}(1+\sqrt{5})\sqrt{50-10\sqrt{5}},0,0,\dots)$ a $\pm(\frac{1}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}},\frac{1}{20}(\sqrt{5}-1)\sqrt{50+10\sqrt{5}},0,0,\dots)$. Pro výpočet je třeba si nejprve rozmyslet, že je potřeba vyšetřit chování na prvních dvou souřadnicích, a pak je možno použít metody hledání vázaných extrémů. Tak to funguje v reálném případě. V komplexním případě jsou normy stejné (že nemohou být menší, je zřejmé; že nejsou větší plyne z toho, že koeficienty ve vzorci pro T jsou reálné). Nabývají se v bodech tvaru $\alpha x+i\beta y$, kde x,y jsou dva z bodů, kde se nabývá norma v reálném případě a $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ splňují $\alpha^2+\beta^2=1$. e) $\|T\|=1$, norma se nabývá v těch bodech S_{ℓ^2}, které mají všechny souřadnice s lichým indexem nulové. T není prostý, $\ker T$ tvoří ty prvky, které mají všechny souřadnice se sudým indexem nulové. T není na, obor hodnot jsou ty body, které mají všechny souřadnice s lichým indexem nulové. T je ortogonální projekce. f) $\|T\|=1$, nabývá se v bodech αe_1, kde $|\alpha|=1$. T je prostý, ale není na. T není izomorfismus. (Uvažte kanonické vektory.) g) $\|T\|=2$, nabývá se v bodech αe_1, kde $|\alpha|=1$. T je prostý a na, je to izomorfismus. Inverzní operátor má normu 1 (je to operátor z příkladu h). h) $\|T\|=1$, nenabývá se. Pro nerovnost $\|T\|\geq 1$ uvažte posloupnost (e_n) kanonických jednotkových vektorů. Při důkazu nenabývání lze postupovat takto: Nechť $(x_n)\in S_{\ell^2}$. Zvolme $m\in\mathbb{N}$ tak, aby $x_m\neq 0$. Pak $\|T((x_n))\|^2\leq 1-(1-\frac{n}{n+1})^2<1$. T je izomorfismus na, inverzní operátor je operátor z příkladu g), má normu 2. i) $\|T\|=1$, nabývá se v takových bodech $(x_n)\in S_{\ell^1}$, jejichž všechny souřadnice jsou nezáporné nebo jsou všechny nekladné (v komplexním případě jsou všechny nezáporným násobkem téže komplexní jednotky), T je prostý a není na. T není izomorfismus, uvažme vektory $(1,-1,1,-1,\dots,1,-1,0,0,\dots)$. j) $\|T\|=1$, nabývá se v týchž bodech jako pro operátor z příkladu i). Je prostý, není na, není to izomorfismus (lze použít stejnou posloupnost jako v i). k) $\|T\|=3$. Nabývá se ve funkcích f splňujících $|f|\leq 1$, $f(0)=-1$ a $f(1)=1$ a ve funkcích, které z těchto vzniknou vynásobením komplexní jednotkou (-1 v reálném případě). Příkladem takové funkce je $f(x)=2x-1$. T je prostý a na (je třeba vyřešit příslušnou rovnici), T je izomorfismus na. $T^{-1}(g)=g+g(0)-g(1)$, $\|T^{-1}\|=3$. l) $\|T\|=r$, nabývá se ve funkcích konstantně rovných dané komplexní jednotce (± 1 v reálném případě). T je prostý, není na. T není izomorfismus, uvažte například funkce $f_n(t)=\sin(nt)$ zúžené na interval $[0,r]$. m) $\|T\|=r$, nabývá se ve funkcích $f\in B_{\mathcal{C}([0,r])}$ splňujících $|f(r)|=1$. T je prostý, není na. T není izomorfismus (zkonstruujte spojité funkce $f_n:[0,r]\to[0,1]$ splňující $f_n(0)=1$ a $f_n=0$ na intervalu $[\frac{r}{n+1},r]$). n) $\|T\|=\frac{1}{2}$, nabývá se ve funkcích $f\in B_{\mathcal{C}([0,1])}$ splňujících $|f(0)|=1$ nebo $|f(1)|=1$. T je prostý, není na. T není izomorfismus (analogicky jako v příkladu m). o) T je izometrie na. p) T je izometrie na. q) $\|T\|=1$, nabývá se v těch funkcích $f\in B_{\mathcal{C}([-1,1])}$, pro které existuje $t\in[0,1]$ splňující $|f(t)|=1$. T není prostý, $\ker T$ tvoří $f\in\mathcal{C}([-1,1])$, které jsou na $[0,1]$ konstantně rovny nule. T není na (obor hodnot tvoří sudé funkce). r) $\|T\|=r+1$, nabývá se ve funkcích konstantně rovných dané komplexní jednotce (± 1 v reálném případě). T je prostý, není na, je izomorfismus do. Obor hodnot je $Y_0=\{f\in\mathcal{C}^1([0,r]);f(0)=0\}$, inverzní operátor je zúžení operátoru z příkladu s) na Y_0, jeho norma je 1. s) $\|T\|=1$, nenabývá se. Pro důkaz nerovnosti $\|T\|\geq 1$ uvažme posloupnost funkcí $f_n(t)=\sin nt$ zúžených na $[0,r]$. Pro důkaz nenabývání si stačí uvědomit, že pokud $\|Tf\|_Y=\|f\|_X$, pak $\|f\|_\infty=0$, tedy $f=0$. T není prostý, $\ker T$ tvoří konstantní funkce. T je na. t) $\|T\|=1$, nabývá se například ve funkci konstantně rovné 1 (a v dalších funkcích též, přesný popis asi není snadný). T není prostý, $\ker T$ tvoří násobky funkce $f(t)=e^t$. T je na (plyne ze znalostí řešení lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu). u) $\|T\|=1$, nabývá se například ve funkci konstantně rovné 1 (a v dalších funkcích též, přesný popis asi není snadný). T není prostý, $\ker T$ tvoří $\operatorname{span}(\cos,\sin)$. T je na (plyne ze znalostí řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty). v) Pro $p=\infty$ je to izometrie na. Pro $p\in[1,\infty)$ je $\|T\|=2^{1/p}$, nenabývá se. Pro důkaz $\|T\|\leq 2^{1/p}$ použijte větu o substituci, pro důkaz $\|T\|\geq 2^{1/p}$ uvažte funkce $f_n=n^{1/p}\chi_{[1-\frac{1}{n},1]}$. Při důkazu nenabývání lze postupovat takto: Nechť $f\in B_{L^p([0,1])}$. Zvolme $s\in(0,1)$ takové, aby $\int_s^1|f|^p<\frac{1}{2}$. Pak dokažte, že $\|Tf\|_p^p\leq 2s+\frac{1}{2}(2-2s)<2$ (výpočet analogický jako v příkladu 2t). T je prostý, není na. T není izomorfismus (uvažte funkce $f_n = n^{1/p}\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$). w) $\|T\| = 1$. Pro $p = \infty$ se nabývá třeba ve funkci konstantně rovné 1 (a také v jiných funkcích, přesně v takových $f \in B_{L^\infty([0,1])}$, pro které platí $\|f \cdot \chi_{[s,1]}\|_\infty = 1$ pro každé $s \in (0,1)$). Pro $p \in [1,\infty)$ se nenabývá (lze dokázat podobně jako v příkladech 1t) a 2v)). T je prostý, není na, není izomorfismus (využijte posloupnost z 2v). x) $\|T\| = \frac{1}{2}$. Pro $p = \infty$ se nabývá třeba ve funkci konstantně rovné 1 (a také v jiných funkcích, přesně v takových $f \in B_{L^\infty([0,1])}$, pro které platí $\|f \cdot \chi_{[0,s]\cup[s,1]}\|_\infty = 1$ pro každé $s \in (0,1)$). Pro $p \in [1,\infty)$ se nenabývá (lze dokázat podobně jako v příkladu 2w) s modifikací stejnou jako v 1u)). T je prostý, není na, není izomorfismus (využijte posloupnost $f_n = n^{1/p}\chi_{[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}]}$). y) $\|T\| = 1$. Nabývá se. Pro $p = \infty$ v těch $f \in B_{L^\infty([0,1])}$, pro které $\|f \cdot \chi_{[0,\frac{1}{2}]}\|_\infty = 1$ (to sice vypadá jako tautologie, ale význam je jasný, příkladem je funkce konstatně rovna 1). Pro $p \in [1,\infty)$ se nabývá v těch $f \in S_{L^p([0,1])}$, které jsou skoro všude nulové na $[\frac{1}{2},1]$. T není prosté, $\ker T$ obsahuje $f \in L^p([0,1])$, které jsou skoro všude nulové na $[0,\frac{1}{2}]$, T není na. z) T je izometrie na.