ÚVOD DO FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2022/2023

PŘÍKLADY KE KAPITOLE I

K oddílu I.1 – základní pojmy, normy, normované prostory

Příklad 1. Nechť X je reálný vektorový prostor a $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ funkce splňující

(i) $\|x\| = 0$ právě když $x = \boldsymbol{o}$.
(ii) $\|\lambda x\| = \lambda \cdot \|x\|$ pro $\lambda > 0$.
(iii) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Ukažte, že $\|\cdot\|$ je norma, právě když pro každé $x \in X$ je $\|-x\| = \|x\|$.

Příklad 2. Nechť X je komplexní vektorový prostor a $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ funkce splňující

(i) $\|x\| = 0$ právě když $x = \boldsymbol{o}$.
(ii) $\|\lambda x\| = \lambda \cdot \|x\|$ pro $\lambda > 0$.
(iii) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

(1) Ukažte, že $\|\cdot\|$ je norma, právě když pro každé $x \in X$ a každou komplexní jednotku α platí $\|\alpha x\| \le \|x\|$.
(2) Ukažte na protipříkladu, že $\|\cdot\|$ nemusí být norma, pokud splňuje $\|ix\| = \|x\|$ pro každé $x \in X$.

Příklad 3. Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$ je konvexní množina.

(1) Nechť $x \in \operatorname{int} A$ a $y \in A$. Ukažte, že úsečka $[x, y)$ patří do $\operatorname{int} A$.
(2) Ukažte, že $\operatorname{int} A$ je konvexní množina.
(3) Ukažte, že $\overline{A}$ je konvexní množina.

Příklad 4. Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y \subset X$ je jeho vektorový podprostor.

(1) Ukažte, že $\overline{Y}$ je také vektorový podprostor X.
(2) Nechť Y má vnitřní bod. Ukažte, že $Y = X$.

Příklad 5. Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$ je jeho podmnožina. Označme

- $\operatorname{co} A$ konvexní obal A, tj. nejmenší konvexní množinu obsahující A, neboli průnik všech konvexních podmnožin X obsahujících A;
- $\overline{\operatorname{co}}\, A$ uzavřený konvexní obal A, tj. nejmenší uzavřenou konvexní množinu obsahující A, neboli průnik všech uzavřených konvexních podmnožin X obsahujících A;
- $\operatorname{span} A$ lineární obal A, tj. nejmenší podprostor obsahující A, neboli průnik všech vektorových podprostorů X obsahujících A;
- $\overline{\operatorname{span}}\, A$ uzavřený lineární obal A, tj. nejmenší uzavřený podprostor obsahující A, neboli průnik všech uzavřených vektorových podprostorů X obsahujících A.

Ukažte, že

$$\overline{\operatorname{co}}\, A = \overline{\operatorname{co} A} \qquad \text{a} \qquad \overline{\operatorname{span}}\, A = \overline{\operatorname{span} A}.$$

`Návod:` *Použijte tvrzení z předchozích dvou příkladů.*

Příklad 6. Nechť c je prostor všech posloupností reálných (nebo komplexních čísel), které mají vlastní limitu. Ukažte, že c je uzavřený podprostor prostoru ℓ^∞, a tedy je to Banachův prostor (s normou $\|\cdot\|_\infty$).

Příklad 7. Nechť Γ je nespočetná množina. Označme

$$\ell^\infty_c(\Gamma) = \{f \in \ell^\infty(\Gamma); \{\gamma \in \Gamma; f(\gamma) \neq 0\} \text{ je nejvýše spočetná}\}.$$

(1) Ukažte, že $\ell^\infty_c(\Gamma)$ je uzavřený podprostor $\ell^\infty(\Gamma)$.
(2) Ukažte, že $c_0(\Gamma) \subset \ell^\infty_c(\Gamma)$.

Příklad 8. Nechť $\mathcal{B}_b([0,1])$ značí vektorový prostor všech omezených borelovských funkcí na $[0,1]$ a $\mathcal{L}_b([0,1])$ značí vektorový prostor všech omezených lebesgueovsky měřitelných funkcí na $[0,1]$. Ukažte, že oba tyto prostory jsou neseparabilní uzavřené podprostory $\ell^\infty([0,1])$.

`Návod:` *Použijte známý fakt, že bodová limita posloupnosti měřitelných funkcí je měřitelná. Pro důkaz neseparability uvažte charakteristické funkce jednobodových množin.*

Příklad 9. Nechť $UL((0,1))$ značí vektorový prostor všech funkcí na $(0,1)$, která mají v každém bodě intervalu $[0,1)$ vlastní limitu zprava a v každém bodě intervalu $(0,1]$ mají vlastní limitu zleva.

(1) Ukažte, že každá funkce z $UL((0,1))$ je omezená na $(0,1)$.
(2) Ukažte, že $UL((0,1))$ je uzavřený podprostor $\ell^\infty((0,1))$.
(3) Nechť $DA = \{f \in UL((0,1)); f \text{ je zprava spojitá na } (0,1)\}$. Ukažte, že DA je uzavřený podprostor $UL((0,1))$.
(4) Ukažte, že prostor DA je neseparabilní.

`Návod:` *(1) Použijte kompaktnost* $[0,1]$. *(2,3) Použijte Moore-Osgoodovu větu. (4) Uvažte charakteristické funkce vhodných intervalů.*

Příklad 10. Nechť

$$X = \{f : [0,1] \to \mathbb{F}; \exists g \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{F}) \exists h \in c_0([0,1];\mathbb{F}) : f = g + h\}.$$

(1) Ukažte, že vyjádření $f = g + h$ použité v definici je jednoznačné.
(2) Ukažte, že X je uzavřený podprostor $\ell^\infty([0,1])$.

`Návod:` *(1) Ukažte, že jediná funkce z* $c_0([0,1])$*, která je spojitá na* $[0,1]$*, je konstantní nulová funkce. (2) Ukažte, že ve vyjádření z bodu (1) je* $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$*, a tento fakt využijte k důkazu uzavřenosti* X.

Příklad 11. Nechť $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ značí prostor všech spojitých funkcí na $\mathbb{R}$, které mají v $+\infty$ i v $-\infty$ limitu nula. Ukažte, že $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ je uzavřený podprostor $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.

Příklad 12. Pro posloupnost čísel (x_n) definujme její variaci vzorcem

$$\operatorname{var}((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| \,.$$

Označme symbolem bv množinu všech posloupností, jejichž variace je konečná.

(1) Ukažte, že bv je vektorový podprostor ℓ^∞.
(2) Ukažte, že každá posloupnost s konečnou variací má vlastní limitu, tj. $bv \subset c$.
(3) Najděte posloupnost v $c \setminus bv$.
(4) Je bv uzavřený v c?
(5) Je bv hustý v c?

(6) Pro $(x_n) \in bv$ položme
$$\|(x_n)\|_{bv} = |x_1| + \operatorname{var}((x_n)).$$
Ukažte, že tento předpis definuje normu na bv, v níž je bv Banachův prostor.
(7) Ukažte, že $\ell^1 \subset bv$ a že bv obsahuje konstantní posloupnosti. Je $bv = \operatorname{span}(\ell^1 \cup \{(1)_{n=1}^\infty\})$?
(8) Je ℓ^1 uzavřený podprostor bv (v normě $\|\cdot\|_{bv}$)?
(9) Jsou na ℓ^1 normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_{bv}$ ekvivalentní?

`Návod:` *(2) Použijte Bolzano-Cauchyovu podmínku. (4,5) Využijte fakt, že posloupnost od jistého členu konstantní patří do bv. (6) Využijte Větičku I.5 z přednášky. (7,8) Uvažte monotónní posloupnosti. (9) Ukažte, že pokud by tyto dvě normy byly ekvivalentní, pak* $(\ell^1, \|\cdot\|_{bv})$ *by byl úplný prostor.*

Příklad 13. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Označme
$$\mathcal{C}^n([0,1],\mathbb{F}) = \{f : (0,1) \to \mathbb{F}; f^{(n)} \text{ je spojitá na } (0,1) \text{ a lze spojitě rozšířit na } [0,1]\}.$$
(1) Ukažte, že pro každé $k \in \{0, \dots, n\}$ je $f^{(k)}$ spojitá na $(0,1)$ a lze spojitě rozšířit na $[0,1]$.
(2) Ukažte, že vzorec
$$\|f\|_{\mathcal{C}^n} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \cdots + \left\|f^{(n)}\right\|_\infty, \quad f \in \mathcal{C}^n([0,1],\mathbb{F})$$
definuje normu, v níž je prostor $\mathcal{C}^n([0,1],\mathbb{F})$ úplný.
(3) Definujme na $\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{F})$ normu předpisem
$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty, \quad f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{F}).$$
Ukažte, že to je norma ekvivalentní $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^2}$.
(4) Je norma na $\mathcal{C}^n([0,1],\mathbb{F})$ definovaná vzorcem $\|f\| = \|f\|_\infty + \left\|f^{(n)}\right\|_\infty$ ekvivalentní $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^n}$?

`Návod:` *(1) Použijte matematickou indukci, Lagrangeovu větu o střední hodnotě a Bolzano-Cauchyovu podmínku. (2) Použijte větu o záměně limity a derivace a matematickou indukci. (3) Vyjádřete* f' *pomocí* f'' *a* $f'(0)$ *a* f *pomocí* f' *a* $f(0)$*. Ukažte, že* $\|f_n\| \to 0$ *implikuje* $\|f_n'\|_\infty \to 0$*. (4) Postupujte podobně jako v (3).*

Příklad 14. Nechť $BV([0,1],\mathbb{F})$ značí množinu všech funkcí $f : [0,1] \to \mathbb{F}$, které mají konečnou variaci. Připomeňme, že variace funkce f na $[0,1]$ je definována vzorcem
$$V(f) = \sup\{\sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})|; n \in \mathbb{N}, 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\}.$$
(1) Ukažte, že každá $f \in BV([0,1],\mathbb{F})$ je omezená na $[0,1]$ a že $BV([0,1],\mathbb{F})$ je vektorový podprostor $\ell^\infty([0,1],\mathbb{F})$.
(2) Ukažte, že předpis
$$\|f\|_{BV} = \|f\|_\infty + V(f), \quad f \in BV([0,1],\mathbb{F}),$$
definuje normu na $BV([0,1],\mathbb{F})$, v níž je $BV([0,1],\mathbb{F})$ Banachův prostor.
(3) Ukažte, že předpis
$$\|f\| = |f(0)| + V(f), \quad f \in BV([0,1],\mathbb{F}),$$
definuje normu na $BV([0,1],\mathbb{F})$ ekvivalentní s $\|\cdot\|_{BV}$.

`Návod:` *(2) Použijte Větičku I.5 z přednášky.*

Příklad 15. Nechť $AC([0,1],\mathbb{F})$ značí množinu všech funkcí $f : [0,1] \to \mathbb{F}$ absolutně spojitých na $[0,1]$. Připomeňme, že pro každou $f \in AC([0,1],\mathbb{F})$ existuje derivace $f'(x)$ pro skoro všechna $x \in [0,1]$ a navíc $f' \in L^1([0,1])$.

(1) Ukažte, že každá $f \in AC([0,1],\mathbb{F})$ má konečnou variaci na $[0,1]$ a že $AC([0,1],\mathbb{F})$ je vektorový podprostor $BV([0,1],\mathbb{F})$.
(2) Ukažte, že předpis
$$\|f\|_{AC} = \|f\|_\infty + \|f'\|_{L^1}, \quad f \in AC([0,1],\mathbb{F}),$$
definuje normu na $AC([0,1],\mathbb{F})$, v níž je $AC([0,1],\mathbb{F})$ Banachův prostor.
(3) Ukažte, že předpis
$$\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_{L^1}, \quad f \in AC([0,1],\mathbb{F}),$$
definuje normu na $AC([0,1],\mathbb{F})$ ekvivalentní s $\|\cdot\|_{AC}$.
(4) Ukažte, že pro $f \in AC([0,1],\mathbb{F})$ je $\|f\|_{AC} = \|f\|_{BV}$ a z toho odvoďte, že $AC([0,1],\mathbb{F})$ je uzavřený podprostor $BV([0,1],\mathbb{F})$.

`Návod:` *(2) Použijte úplnost prostoru L^1, Newton-Leibnizovu formuli pro absolutně spojité funkce a záměnu limity a integrálu. (4) Je třeba ukázat, že $V(f) = \int_0^1 |f'|$. Pro důkaz nerovnosti $\leq$ použijte definici variace a Newton-Leibnizovu formuli pro absolutně spojité funkce. Pro důkaz nerovnosti $\geq$ postupujte takto: Nechť $F(t) = V(f;0,t)$ je variace f na $[0,t]$. Pak F je neklesající, $|f(s) - f(t)| \leq F(s) - F(t)$ pro $0 \leq t \leq s \leq 1$. Tedy $|f'| \leq F'$ skoro všude na $[0,1]$. Odtud odvoďte, že $\int_0^1 |f'| \leq F(1) - F(0) = V(f)$.*

Příklad 16. Nechť (M,d) je omezený metrický prostor. Označmě symbolem $\mathrm{Lip}((M,d);\mathbb{F})$ vektorový prostor všech lipschitzovských funkcí $f : M \to \mathbb{F}$. Pro $f \in \mathrm{Lip}((M,d);\mathbb{F})$ označme a $\mathrm{lip}(f)$ nejmenší lipschitzovskou konstantu f, tj.
$$\mathrm{lip}(f) = \sup\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}; x, y \in M, x \neq y \right\}.$$

(1) Ukažte, že každá $f \in \mathrm{Lip}((M,d);\mathbb{F})$ je omezená na M.
(2) Ukažte, že vzorec
$$\|f\|_L = \|f\|_\infty + \mathrm{lip}(f), \quad f \in \mathrm{Lip}((M,d);\mathbb{F}),$$
definuje normu na $\mathrm{Lip}((M,d);\mathbb{F})$ a $\mathrm{Lip}((M,d);\mathbb{F})$ je s touto normou Banachův prostor.
(3) Zvolme pevné $x_0 \in M$. Ukažte, že vzorec
$$\|f\| = |f(x_0)| + \mathrm{lip}(f), \quad f \in \mathrm{Lip}((M,d);\mathbb{F}),$$
definuje normu ekvivalentní s $\|\cdot\|_L$.
(4) Uvažme $M = [0,1]$ s euklidovskou metrikou. Ukažte, že pro $f \in \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{F})$ platí $f \in \mathrm{Lip}([0,1];\mathbb{F})$ a $\|f\|_L = \|f\|_{\mathcal{C}^1}$. Ukažte, že $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{F})$ je uzavřený podprostor $\mathrm{Lip}([0,1];\mathbb{F})$.

`Návod:` *(2) Použijte Větičku I.5 z přednášky. (4) Použijte Newton-Leibnizovu formuli.*

Příklad 17. Nechť (M,d) je metrický prostor (ne nutně omezený). Označmě symbolem $\mathrm{Lip}((M,d);\mathbb{F})$ vektorový prostor všech lipschitzovských funkcí $f : M \to \mathbb{F}$ a pro $f \in \mathrm{Lip}((M,d);\mathbb{F})$ označme $\mathrm{lip}(f)$ nejmenší lipschitzovskou konstantu f (viz Příklad 16). Zvolme pevné $x_0 \in M$.

(1) Ukažte, že prvky $\mathrm{Lip}((M,d);\mathbb{F})$ nemusí být omezené na M.

(2) Ukažte, že vzorec

$$\|f\| = |f(x_0)| + \operatorname{lip}(f), \quad f \in \operatorname{Lip}((M,d);\mathbb{F}),$$

definuje normu na $\operatorname{Lip}((M,d);\mathbb{F})$ a $\operatorname{Lip}((M,d);\mathbb{F})$ je s touto normou Banachův prostor.

(3) Zvolme $x_1 \in M \setminus \{x_0\}$ a definujme normu na $\operatorname{Lip}((M,d);\mathbb{F})$ stejným způsobem, jen bod x_0 v definici nahradíme bodem x_1. Je tato norma ekvivalentní normě z předchozího bodu?

Příklad 18. Nechť μ je nezáporná míra a $p \in [1,\infty]$.

(1) Ukažte, že jednoduché funkce v $L^p(\mu)$ tvoří hustý podprostor $L^p(\mu)$.

(2) Nechť μ je regulární borelovská míra na nějakém metrickém prostoru M. Ukažte, že lineární kombinace charakteristických funkcí otevřených množin konečné míry tvoří hustý podprostor $L^p(\mu)$ pro $p \in [1,\infty)$.

(3) Nechť μ je navíc σ-konečná a M separabilní. Ukažte, že prostor $L^p(\mu)$ pro $p \in [1,\infty)$ je separabilní.

`Návod:` *(3) ukažte, že existuje spočetná báze otevřených množin M tvořená otevřenými množinami konečné míry. Ukažte, že charakteristickou funkci otevřené množiny konečné míry lze aproximovat charakteristickými funkcemi konečných sjednocení prvků báze a následně použijte výsledek (2).*

Příklad 19. Nechť (X_n) je posloupnost normovaných lineárních prostorů a nechť $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ je jejich kartézský součin uvažovaný jako vektorový prostor s obvyklými operacemi.

(1) Ukažte, že

$$(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n)_{\ell^\infty} = \{(x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n; \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{X_n} < \infty\}$$

je normovaný lineární prostor, pokud normu definujeme jako $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{X_n}$. Ukažte, že tento prostor je úplný, právě když každý z prostorů X_n je úplný.

(2) Ukažte, že

$$(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n)_{c_0} = \{(x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n; \lim_n \|x_n\|_{X_n} = 0\}$$

je uzavřený podprostor $(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n)_\infty$

Příklad 20. Nechť (X_n) je posloupnost normovaných lineárních prostorů a $p \in [1,\infty)$. Položme

$$(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n)_{\ell^p} = \{(x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n; \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n}^p < \infty\}.$$

Ukažte, že to je normovaný lineární prostor, pokud normu definujeme jako $\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n}^p\right)^{1/p}$. Ukažte, že tento prostor je úplný, právě když všechny prostory X_n jsou úplné.

`Návod:` *Pro důkaz úplnosti použijte Větičku I.5 z přednášky.*

K oddílu I.2 – spojitá lineární zobrazení, izometrické a izomorfní prostory

Příklad 21.

(1) Ukažte, že prostory $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ a $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ jsou izometrické a najděte nějakou lineární izometrii mezi nimi.

(2) Ukažte, že prostory $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$ a $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$ nejsou izometrické.
(3) Jsou prostory $(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_1)$ a $(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\infty)$ izometrické?

`Návod:` *(2) Použijte pojem extremálního bodu: Bod z jednotkové koule je extremální, pokud není středem žádné úsečky, která leží celá v jednotkové kouli. Ukažte, že izometrie na zachovává extremální body. Popište a spočítejte extremální body jednotkových koulí obou prostorů. (3) Popište extremální body jednotkových koulí obou prostorů a použijte fakt, že kružnice není homeomorfní kartézskému součinu dvou kružnic.*

Příklad 22. Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval (omezený nebo neomezený). Ukažte, že pro každé $p \in [1, \infty]$ je prostor $L^p((a, b))$ izometrický prostoru $L^p((0, 1))$.

`Návod:` *Nejprve to dokažte pro omezený interval (a, b) (s využitím afinní bijekce mezi (a, b) a $(0, 1)$). Pro interval $(0, \infty)$ postupujte například takto: S vyžitím předchozího případu zvolte izometrii T_n prostoru $L^p((n-1, n))$ na prostor $L^p((\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}))$ pro $n \in \mathbb{N}$ a „slepte“tyto izometrie. Pro ostatní neomezené intervaly postupujte podobně.*

Příklad 23. Ukažte, že prostor $L^p((0, 1))$ obsahuje podprostor izometrický prostoru ℓ^p.

`Návod:` *Uvažujte funkce konstantní na každém z intervalů $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$.*

Příklad 24. Ukažte, že prostory c_0 a c (viz Příklad 6) jsou izomorfní a najděte nějaký izomorfismus mezi nimi. Jsou izometrické?

`Návod:` *Pro zkoumání izometričnosti využijte extremální body.*

Příklad 25.
(1) Ukažte, že prostor $\mathcal{C}([0, 1])$ obsahuje podprostor izometrický prostoru c_0.
(2) Obsahuje $\mathcal{C}([0, 1])$ podprostor izometrický prostoru c (viz Příklad 6)?

`Návod:` *(1) Sestrojte spojité funkce $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$, které jsou nulové mimo $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ a nabývají hodnoty 1 ve středu tohoto intervalu a uvažte jejich uzavřený lineární obal. (2) Přidejte k funkcím z bodu (1) ještě konstantní funkce.*

Příklad 26. Nechť $T : L^1([0, 1]) \to AC([0, 1])$ je definováno vzorcem $Tf(t) = \int_0^t f$. Ukažte, že T je izomorfismus do. Je T izometrie?

`Návod:` *Využijte Příklad 15.*

Příklad 27. Nechť X je prostor z Příkladu 10. Pro $f \in X$ a uvedený rozklad $f = g + h$ označme $Pf = g$ a $Qf = h$. Uvažujme P a Q jako zobrazení X do X. Ukažte, že P a Q jsou spojité projekce, spočtěte jejich normy, jádra a obory hodnot.

Příklad 28. Nechť $\mathcal{M}_{ac}([0, 1])$ značí podprostor $\mathcal{M}([0, 1])$ tvořený mírami, které jsou absolutně spojité vzhledem k Lebesgueově míře.
(1) Ukažte, že $\mathcal{M}_{ac}([0, 1])$ je izometrický prostoru $L^1([0, 1])$ a popiště nějakou izometrii mezi těmito prostory.
(2) Ukažte, že $\mathcal{M}_{ac}([0, 1])$ je uzavřený podprostor $\mathcal{M}([0, 1])$.

`Návod:` *(1) Použijte Radon-Nikodýmovu větu.*

Příklad 29. Pro $\mu \in \mathcal{M}([0, 1])$ definujme funkce $T_1(\mu)$ a $T_2(\mu)$ předpisem

$$\begin{aligned} T_1(\mu)(t) &= \mu([0, t)), \\ T_2(\mu)(t) &= \mu([0, t]), \end{aligned} \qquad \text{pro } t \in [0, 1].$$

(1) Ukažte, že T_1 a T_2 jsou lineární operátory $\mathcal{M}([0, 1])$ do $BV([0, 1])$.
(2) Ukažte, že $\|T_1\| = 1$ a najděte $\ker T_1$.

(3) Ukažte, že T_2 je izometrie.
(4) Je některý z operátorů T_1 a T_2 na?

Návod: *(3) S použitím regularity měr z $\mathcal{M}([0,1])$ ukažte, že v definici totální variace těchto měr stačí brát disjunktní systémy polouzavřených intervalů. (4) Uvažte charakteristické funkce jednobodových množin.*

Příklad 30. Nechť $\mathcal{M}_c([0,1])$ značí podprostor $\mathcal{M}([0,1])$ tvořený spojitými mírami (tj. mírami, které jsou nulové na jednobodových množinách).
(1) Ukažte že $\mathcal{M}_c([0,1]) = \ker(T_1 - T_2)$, kde T_1 a T_2 jsou jako v předchozím příkladu.
(2) Nechť T je zúžení T_1 (nebo T_2) na $\mathcal{M}_c([0,1])$. Ukažte, že T je izometrie $\mathcal{M}_c([0,1])$ do $BV([0,1])$ a že obor hodnot jsou právě spojité funkce z $BV([0,1])$.
(3) Ukažte, prostory $\mathcal{M}_c([0,1])$ a $BV_c([0,1])$ (tvořený spojitými funkcem z $BV([0,1])$) jsou úplné.

K oddílu I.3 – skalární součin, Hilbertovy prostory

Příklad 31. Nechť X je komplexní vektorový prostor a nechť $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je reálný skalární součin na X (tj. reálná funkce na $X \times X$, která splňuje podmínky (i),(iii)–(v) z definice a podmínku (ii) pro reálné λ) a $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pro $x \in X$. Nechť $\|ix\| = \|x\|$ pro $x \in X$. Ukažte, že pak je $\|\cdot\|$ norma na komplexním prostoru X, která je indukovaná (komplexním) skalárním součinem.

Návod: *S použitím polarizační identity ukažte, že $\langle x, ix\rangle = 0$ pro každé $x \in X$. Pak ukažte, že vzorec $\langle x, y\rangle_C = \langle x, y\rangle + i\,\langle x, iy\rangle$ definuje skalární součin na X a $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle_C$.*

Příklad 32. Nechť (X_n) je posloupnost Hilbertových prostorů. Nechť X je jejich ℓ^2-suma (tj. prostor vzniklý postupem z Příkladu 20 pro $p = 2$). Ukažte, že X je Hilbertův prostor.

Návod: *Použijte rovnoběžníkové pravidlo.*

K oddílu I.4 – řady v normovaných prostorech

Příklad 33. Nechť (e_n) je posloupnost kanonických jednotkových vektorů v prostoru ℓ^p nebo c_0.
(1) Ukažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$ není absolutně konvergentní v žádném z těchto prostorů.
(2) Ukažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$ je bezpodmínečně konvergentní v každém z těchto prostorů s výjimkou prostoru ℓ^1.

Příklad 34. Nechť (x_n) je posloupnost v Banachově prostoru. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:
(i) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je bezpodmínečně konvergentní.
(ii) Pro každou posloupnost (ϵ_n) znamének (tj. čísel 1 a -1) řada $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n x_n$ konverguje.
(iii) Pro každou vybranou posloupnost (x_{n_k}) řada $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ konverguje.

Návod: *(i)⇔(iii) Použijte Bolzano-Cauchyovu podmínku (Tvrzení I.29(a) z přednášky).*

K oddílu I.5 – Hilbertovy prostory, kolmost, nejbližší prvky

Příklad 35. Nechť (Ω, Σ, P) je pravděpodobnostní prostor a Y_1, Y_2 jsou dvě nezávislé (reálné) náhodné veličiny s konečným druhým momentem a nulovou střední hodnotou. Ukažte, že Y_1 a Y_2 jsou kolmé prvky v prostoru $L^2(P)$.

Návod: *Použijte definice příslušných pojmů z teorie pravděpodobnosti a vzorec pro střední hodnotu součinu nezávislých náhodných veličin.*

Příklad 36.

(1) Ukažte na příkladu, že v neúplném prostoru se skalárním součinem maximální ortonormální systém nemusí být úplný.
(2) Ukažte, že v separabilním prostoru se skalárním součinem existuje úplný ortonormální systém.

`Návod:` *(1) Uvažte například lineární obal množiny* $\{e_2, e_3, \dots\} \cup \{(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}\}$ *v* ℓ^2. *(2) Použijte ortogonalizaci na lineárně nezávislou posloupnost s hustým lineárním obalem.*

K oddílu I.6 – prostory konečné a nekonečné dimenze

Příklad 37. Nechť X je normovaný lineární prostor konečné dimenze a $C \subset X$ neprázdná uzavřená konvexní množina.

(1) Ukažte, že pro každé $x \in X$ existuje bod $y \in C$ nejbližší k x.
(2) Najděte příklad X, C a x takový, že k x existuje v C více nejbližších bodů.
(3) Ukažte, že, pokud $X = (\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_p)$ pro $p \in (1, \infty)$, je nejbližší bod jednoznačně určen.

`Návod:` *(1) Použijte kompaktnost omezených uzavřených množin. (2) Uvažte například* $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$. *(3) Ukažte, že pro tyto prostory jednotková sféra neobsahuje žádnou úsečku, a že z toho tvrzení plyne.*

Příklad 38. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nekonečné dimenze. Ukažte, že na X existují normy $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ s vlastnostmi

(a) $\|\cdot\|_a \geq \|\cdot\|$ a přitom tyto dvě normy nejsou ekvivalentní;
(b) identita na X není spojitá ani z $\|\cdot\|$ do $\|\cdot\|_b$ ani z $\|\cdot\|_b$ do $\|\cdot\|$.

`Návod:` *Modifikujte důkaz Tvrzení I.46(b) z přednášky.*

K oddílu I.7 – reálné a komplexní prostory

Příklad 39. Nechť H je reálný Hilbertův prostor nekonečné dimenze. Ukažte, že H je izometrický X_R pro nějaký komplexní Hilbertův prostor X.

`Návod:` *Použijte Důsledek I.38 z přednášky.*

Příklad 40. Nechť $X = c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ nebo $X = \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ pro $p \in [1, \infty]$. Ukažte, že na X existuje komplexní struktura, tj. X je izomorfní Y_R pro nějaký komplexní Banachův prostor.

`Návod:` *Použijte Tvrzení I.48 z přednášky.*

Příklad 41. (1) Nechť X je komplexní normovaný lineární prostor. Ukažte, že pro každé $x \in X_R$ existuje podprostor X_R izometrický $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ obsahující x.
(2) Nechť $Y \subset\subset c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ je podprostor dimenze 2. Ukažte, že jednotková sféra Y obsahuje úsečku.
(3) Ukažte, že $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ není izometrický X_R pro žádný komplexní prostor X.

`Návod:` *(2) Jet* $Y = \operatorname{span}\{x, y\}$ *pro lineárně nezávislé* $x, y \in c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$. *Pokud existuje* n, *že* $|x_n| = |y_n| = 1$, *pak* S_Y *obsahuje buď úsečku spojující* x *a* y *nebo úsečku spojující* x *a* $-y$. *V případě, že takové* n *neexistuje, označme* $F = \{n; |x_n| = 1\}$. *Nechť* $n \in F$ *je takové, že* $|y_n - x_n|$ *je nejmenší. BÚNO* $x_n = 1$ *(jinak místo* x *a* y *uvažujme* $-x$ *a* $-y$*). Pak pro dost malé* $\varepsilon > 0$ *je* $\|x + \varepsilon y\| = 1 + \varepsilon y_n$. *Odtud plyne existence úsečky na* S_Y.

Další příklady související s úvodní kapitolou

Příklad 42. Nechť X je reálný normovaný lineární prostor dimenze n a $A \subset X$.

(1) Ukažte, že pro každý $x \in \operatorname{co} A$ existují $a_1, \dots, a_{n+1} \in A$, že $x \in \operatorname{co}\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$.
(2) Je-li A kompaktní, dokažte, že $\operatorname{co} A$ je také kompaktní.
(3) Jaká varianta (1) platí pro komplexní prostory?

`Návod:` *(2) Použijte známá fakta, že kartézský součin kompaktních množin je kompaktní množina a že spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina. S využitím (1) vyjádřete* $\operatorname{co} A$ *jako spojitý obraz* $A^{n+1} \times K$*, kde* K *je vhodná kompaktní podmnožina* $\mathbb{R}^{n+1}$*.*

Příklad 43. Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$ je kompaktní.

(1) Ukažte, že $\overline{\operatorname{co}} A$ je kompaktní.
(2) Ukažte na protipříkladu, že $\operatorname{co} A$ nemusí být kompaktní.

`Návod:` *(1) Ukažte, že* $\operatorname{co} A$ *je totálně omezená. (2) Využijte fakt, že, pokud* $x_n \to x$*, pak množina* $\{x\} \cup \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ *je kompaktní.*

Příklad 44. Nechť X je reálný normovaný lineární prostor konečné dimenze a $A \subset X$ je konvexní množina splňující $\operatorname{span} A = X$. Ukažte, že A má neprázdný vnitřek v X.

`Návod:` *BÚNO* $0 \in A$*. Nechť* $a_1, \dots, a_n \in A$ *je báze* X*. Ukažte, že* $\frac{1}{n+1}(a_1 + \cdots + a_n)$ *je vnitřní bod* A*. (Uvažte duální bázi a použijte, že všechny lineární funkcionály jsou spojité – Důsledek I.42(e) z přednášky.)*

Příklad 45. Nechť X je Banachův prostor a $A \subset X$ je omezená množina. Označme

$$\operatorname{co}_\sigma A = \{\sum_{n=1}^{\infty} t_n a_n; a_n \in A, t_n \in [0,1] \text{ pro } n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1\}.$$

(1) Ukažte, že všechny uvedené řady konvergují v X.
(2) Ukažte, že $\operatorname{co} A \subset \operatorname{co}_\sigma A \subset \overline{\operatorname{co}} A$.
(3) Ukažte na protipříkladech, že nemusí platit rovnosti.

`Návod:` *(3) Pro první inkluzi použijte stejný protipříklad jako v Příkladu 43, pro druhou uvažte například otevřenou kouli.*