

ÚVOD DO FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2022/2023

PŘÍKLADY KE KAPITOLE III

K ODDÍLU III.1 – KVOCIENTY

Příklad 1. Necht' X je normovaný lineární prostor, Z jeho uzavřený podprostor a $q : X \rightarrow X/Z$ kanonické kvocientové zobrazení. Připomeňme, že Větička II.2 z přednášky říká, že $q(U_X) = U_{X/Z}$. Ukažte, že $q(B_X) = B_{X/Z}$, právě když pro každé $x \in X$ existuje k němu nejbližší bod v Z .

Příklad 2. Necht' $X = \mathcal{C}([0, 1])$ a $Z = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]); f = 0 \text{ na } [0, \frac{1}{2}]\}$.

- (1) Pro $f \in X$ spočítejte $\text{dist}(f, Z)$. Existuje nejbližší bod?
- (2) Ukažte, že X/Z je izometrické $\mathcal{C}([0, \frac{1}{2}])$ a popište tuto izometrii.

Návod: Ukažte, že zobrazení $f \mapsto f|_{[0, \frac{1}{2}]}$ je kvocientové.

Příklad 3. $X = \mathcal{C}([0, 1])$ a $Z = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]); f(\frac{1}{n}) = 0 \text{ pro } n \in \mathbb{N}\}$.

- (1) Pro $f \in X$ spočítejte $\text{dist}(f, Z)$. Existuje nejbližší bod?
- (2) Ukažte, že X/Z je izometrické prostoru c a popište tuto izometrii.

Příklad 4. Uvažujme kvocient ℓ^∞/c_0 .

- (1) Ukažte, že pro každé $(x_n) \in \ell^\infty$ je $\|[(x_n)]\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n|$.
- (2) Ukažte, že pro každé $x \in \ell^\infty$ existuje prvek c_0 k němu nejbližší.
- (3) Je nejbližší bod určen jednoznačně?

Příklad 5. Uvažujme kvocient ℓ^∞/c pro reálné prostory. (Prostor c byl definován v Příkladu I.6.)

- (1) Ukažte, že pro každé $(x_n) \in \ell^\infty$ je $\|[(x_n)]\| = \frac{1}{2} \text{osc}((x_n))$, kde

$$\text{osc}((x_n)) = \inf_{n_0 \in \mathbb{N}} \sup_{m, n \geq n_0} |x_m - x_n|.$$

- (2) Ukažte, že pro každé $x \in \ell^\infty$ existuje prvek c k němu nejbližší.
- (3) Je nejbližší bod určen jednoznačně?

Návod: Ukažte, že $\text{osc}((x_n)) = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n - \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$, nejbližším bodem bude vhodná posloupnost (y_n) splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{2}(\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n)$.

Příklad 6. Necht' A je neprázdná omezená podmnožina \mathbb{C} .

- (1) Ukažte, že existuje

$$r(A) = \min\{\rho \geq 0; \exists \lambda \in \mathbb{C} : A \subset B(\lambda, \rho)\}.$$

Zde $B(\lambda, 0) = \{\lambda\}$. ($r(A)$ je Čebyševův poloměr množiny A .)

- (2) Ukažte, že existuje právě jedno $\lambda \in \mathbb{C}$ splňující $A \subset B(\lambda, r(A))$. (Toto λ je Čebyševův střed množiny A .)

Návod: (1) Necht' r značí infimum. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolme $\lambda_n \in \mathbb{C}$, že $A \subset B(\lambda_n, r + \frac{1}{n})$. Ukažte, že posloupnost (λ_n) je omezená, a je-li λ hromadný bod, pak $A \subset B(\lambda, r)$. (2) Necht' $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $s = |\lambda - \mu| > 0$. Ukažte, že pro každé $r \geq \frac{s}{2}$ je $B(\lambda, r) \cap B(\mu, r) \subset B(\frac{1}{2}(\lambda + \mu), \sqrt{r^2 - (s/2)^2})$.

Příklad 7. Uvažujme kvocient ℓ^∞/c pro komplexní prostory. (Prostor c byl definován v Příkladu I.6.)

- (1) Ukažte, že pro každé $(x_n) \in \ell^\infty$ je $\|[(x_n)]\| = \inf_{n \in \mathbb{N}} r(\{x_m; m \geq n\})$.
- (2) Ukažte, že pro každé $x \in \ell^\infty$ existuje prvek c k němu nejbližší.
- (3) Je nejbližší bod určen jednoznačně?

Návod: (2) Označme $r_n = r(\{x_m; m \geq n\})$ a $r = \inf_n r_n = \lim_n r_n$. Necht' $\lambda_n \in \mathbb{C}$ je Čebyševův střed množiny $\{x_m; m \geq n\}$. Ukažte, že posloupnost (λ_n) konverguje k nějakému $\lambda \in \mathbb{C}$ a že nejbližším bodem je vhodná posloupnost s limitou λ .

Příklad 8. Necht' $\mathcal{B}_b([0, 1])$ a $\mathcal{L}_b([0, 1])$ jsou prostory omezených borelovských resp. lebesgueovskými měřitelných funkcí definované v Příkladu I.8. Necht' Z je podprostor $\mathcal{L}_b([0, 1])$ tvořený funkcemi skoro všude rovnými nule.

- (1) Ukažte, že Z je uzavřený podprostor $\mathcal{L}_b([0, 1])$.
- (2) Pro $f \in \mathcal{L}_b([0, 1])$ spočítejte $\text{dist}(f, Z)$.
- (3) Pro $f \in \mathcal{B}_b([0, 1])$ spočítejte $\text{dist}(f, Z \cap \mathcal{B}_b([0, 1]))$. Je tato vzdálenost stejná jako $\text{dist}(f, Z)$?
- (4) Ukažte, že kvocienty $\mathcal{L}_b([0, 1])/Z$ i $\mathcal{B}_b([0, 1])/(Z \cap \mathcal{B}_b([0, 1]))$ jsou izometrické prostory $L^\infty([0, 1])$.

K ODDÍLU III.2 – MNOŽINY PRVNÍ A DRUHÉ KATEGORIE, VĚTA O OTEVŘENÉM ZOBRAZENÍ, VĚTA O UZAVŘENÉM GRAFU

Příklad 9. Necht' X je normovaný lineární prostor a $Y \subset X$ jeho vektorový podprostor. Ukažte, že Y je řídký v X , právě když není hustý v X .

Příklad 10. Necht' X je Banachův prostor a $Y \subset X$ vektorový podprostor, který je reziduální (tj. $X \setminus Y$ je první kategorie v X). Ukažte, že $Y = X$.

Návod: Necht' $x \in X \setminus Y$. Uvažte Y a $x + Y$.

Příklad 11. Necht' X je Banachův prostor a $Y \subset X$ hustý podprostor. Ukažte, že Y je první kategorie v X , právě když je první kategorie v sobě.

Příklad 12. Necht' X je Banachův prostor nekonečné dimenze. Ukažte, že každá jeho algebraická (Hamelova) báze je nespočetná.

Návod: Použijte fakt, že každý podprostor X konečné dimenze je uzavřený v X a Baireovu větu.

Příklad 13. Ukažte, že každý nekonečněrozměrný Banachův prostor X obsahuje vlastní podprostor, který je druhé kategorie v X .

Návod: Necht' B je algebraická báze X a $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ prostá posloupnost v B . Z Baireovy věty odvoďte, že existuje $n \in \mathbb{N}$, že $\text{span}(B \setminus \{x_k; k \geq n\})$ je druhé kategorie v X .

Příklad 14. Ukažte, že existují normované lineární prostory, které nejsou úplné, ale jsou druhé kategorie v sobě.

Návod: Zkombinujte příklady 13, 9 a 11.

Příklad 15. Necht' c_{00} označuje vektorový prostor všech číselných posloupností, které mají jen konečně mnoho nenulových členů. Necht' $X = (c_{00}, \|\cdot\|_p)$, kde $p \in [1, \infty]$.

- (1) Ukažte, že prostor X je první kategorie v sobě.
- (2) Najděte posloupnost spojitých lineárních funkcionalů (f_n) na X , která bodově konverguje k nespojitému funkcionalu.

Příklad 16.

- (1) Najděte funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která má uzavřený graf a není spojitá na \mathbb{R} .
- (2) Najděte funkci $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, která má uzavřený graf a není spojitá na $[0, 1]$.
- (3) Necht' X, K jsou metrické prostory, přičemž K je kompaktní. Ukažte, že funkce $f : X \rightarrow K$ je spojitá, právě když má uzavřený graf.

Příklad 17. Necht' X je Banachův prostor, Y normovaný lineární prostor a $T : X \rightarrow Y$ je spojitě lineární zobrazení X na Y .

- (1) Je-li T otevřené, ukažte, že Y je úplný.
- (2) Je-li Y druhé kategorie v sobě, ukažte, že T je otevřené.
- (3) Je-li Y druhé kategorie v sobě, ukažte, že Y je úplný.

Návod: (1) Ukažte, že zobrazení \tilde{T} z Tvzení III.3(b) z přednášky je izomorfismus. (2) Projděte důkaz věty o otevřeném zobrazení a ověřte, že funguje i za těchto předpokladů. (3) Zkombinujte (1) a (2).

Příklad 18. Necht' g je měřitelná funkce na $(0, 1)$. Předpokládejme, že pro každou $f \in L^1(0, 1)$ platí $fg \in L^1(0, 1)$. Ukažte, že $g \in L^\infty(0, 1)$.

Návod: Definujme operátor $T : L^1(0, 1) \rightarrow L^1(0, 1)$ předpisem $Tf = fg$. Ukažte, že tento operátor má uzavřený graf. Přitom použijte, že posloupnost konvergentní v $L^1(0, 1)$ má podposloupnost konvergující skoro všude. Následně použijte větu o uzavřeném grafu a z toho odvoďte, že $g \in L^\infty(0, 1)$.

Příklad 19. Necht' g je měřitelná funkce na $(0, 1)$. Předpokládejme, že pro každou $f \in L^\infty(0, 1)$ platí $fg \in L^1(0, 1)$. Ukažte, že $g \in L^1(0, 1)$.

Návod: Postupujte stejně jako v předchozím příkladu.

Příklad 20. Necht' g je měřitelná funkce na $(0, 1)$ a $p \in (1, \infty)$. Předpokládejme, že pro každou $f \in L^p(0, 1)$ platí $fg \in L^1(0, 1)$. Ukažte, že $g \in L^q(0, 1)$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Návod: Postupujte stejně jako v předchozích dvou příkladech.

Příklad 21. Necht' g je měřitelná funkce na $(0, 1)$ a $p \in [1, \infty]$. Předpokládejme, že pro každou $f \in L^p(0, 1)$ platí $fg \in L^p(0, 1)$. Ukažte, že $g \in L^\infty(0, 1)$.

Návod: Postupujte stejně jako v předchozích třech příkladech.

K ODDÍLU III.3 – PROJEKCE, KOMPLEMENTOVANÉ PODPROSTORY

Příklad 22. Necht' X je normovaný lineární prostor, Y a Z jeho dva uzavřené podprostory splňující $Y \cap Z = \{0\}$ a $Y + Z = X$. Ukažte, že Z je topologický doplněk Y , právě když $\text{dist}(S_Y, S_Z) > 0$.

Návod: Necht' P je projekce na Y podél Z . Je-li P spojitá, ukažte, že $\text{dist}(S_Y, S_Z) \geq \frac{1}{\|P\|}$. Obráceně, není-li P spojitá, existuje posloupnost (x_n) v X , pro kterou platí $x_n \rightarrow 0$ a $\|Px_n\| = 1$. Odtud odvoďte, že $\text{dist}(S_Y, S_Z) = 0$.

Příklad 23. Necht' X je Banachův prostor, Y a Z jeho dva uzavřené podprostory splňující $Y \cap Z = \{0\}$. Ukažte, že $Y + Z$ je uzavřený podprostor X , právě když $\text{dist}(S_Y, S_Z) > 0$.

Návod: Je-li $Y + Z$ uzavřený, použijte Větu III.14 z přednášky a předchozí příklad. Obráceně, je-li $\text{dist}(S_Y, S_Z) > 0$, z předchozího příkladu plyne, že projekce P prostoru $Y + Z$ na Y podél Z je spojitá. Rozšířte P a $\text{Id} - P$ na $\overline{Y + Z}$ podle Tvrdění I.15 z přednášky a ukažte, že $\overline{Y + Z} = Y + Z$.

Příklad 24. Necht' $X = c_0$ nebo $X = \ell^p$, $p \in [1, \infty)$. Najděte dva uzavřené podprostory $Y, Z \subset X$ takové, že $Y \cap Z = \{0\}$ a $Y + Z$ je vlastní hustý podprostor X .

Návod: Necht' (e_n) jsou kanonické bázové vektory. Vezměte $Y = \overline{\text{span}}\{e_{2n}; n \in \mathbb{N}\}$ a $Z = \overline{\text{span}}\{\alpha_n e_{2n-1} + e_{2n}; n \in \mathbb{N}\}$ pro vhodně zvolené konstanty α_n .

Příklad 25. Necht' X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor izomorfní prostoru $\ell^\infty(\Gamma)$ pro nějakou množinu Γ . Ukažte, že Y je komplementovaný v X .

Návod: Použijte Příklad II.7.

Příklad 26. Ukažte, že existuje systém \mathcal{A} nekonečných podmnožin \mathbb{N} , který je nespočetný a přitom průnik každých dvou různých prvků \mathcal{A} je konečný. (Tj. nespočetný skoro disjunktní systém podmnožin \mathbb{N} .)

Návod: První možnost: Použijte Zornovo lemma k důkazu, že existuje maximální systém s danou vlastností a ukažte, že nemůže být spočetný. Druhá možnost: Pro každé $x \in \mathbb{R}$ zafixujme posloupnost $(q_n(x))$ racionálních čísel konvergující k x a položme $A_x = \{q_n(x); n \in \mathbb{N}\}$. Nakonec použijte, že existuje bijekce \mathbb{Q} na \mathbb{N} .

Příklad 27. Ukažte, že c_0 není komplementovaný v ℓ^∞ .

Návod: Sporem. Necht' P je spojitá projekce ℓ^∞ na c_0 . Označme $Q = I - P$. Pak i Q je spojitá projekce, $c_0 = \ker Q$. Necht' \mathcal{A} je systém z předchozího příkladu. Pro $A \in \mathcal{A}$ necht' $x_A = \chi_A$. Ukažte, že existují $m, n \in \mathbb{N}$, že $\mathcal{A}_{m,n} = \{A \in \mathcal{A}; |Q(x_A)(n)| > \frac{1}{m}\}$ je nespočetná. Zároveň ukažte, že $\mathcal{A}_{m,n}$ musí být konečná: Necht' $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}_{m,n}$. Položme $B_j = A_j \setminus \bigcup_{l \neq j} A_l$ a $y_j = \chi_{B_j}$. Ukažte, že $Q(y_j) = Q(x_{A_j})$ a pro vhodné komplexní jednotky α_j platí $\left\| \sum_j \alpha_j y_j \right\| = 1$ a $\left\| Q(\sum_j \alpha_j y_j) \right\| \geq \frac{k}{m}$ a odtud odvoďte horní odhad pro k . Nakonec odvoďte spor.

K ODDÍLU III.4 – DUÁLNÍ A ADJUNGOVANÉ OPERÁTORY

Příklad 28. Necht' X je normovaný lineární prostor, Y jeho podprostor. Necht' $T : Y \rightarrow X$ je identické zobrazení. Ukažte, že $T' : X^* \rightarrow Y^*$ je dáno vzorcem $T'(x^*) = x^*|_Y$ pro $x^* \in X^*$.

Příklad 29. Necht' X je normovaný lineární prostor a $\varphi \in X^*$.

- (1) Interpretujte rovnost $\mathbb{F}^* = \mathbb{F}$ (tj. popište příslušnou izometrii).
- (2) Odvoďte vzorec pro $\varphi' \in L(\mathbb{F}^*, X^*)$ jakožto pro prvek $L(\mathbb{F}, X^*)$ při identifikaci z bodu (1).

Příklad 30. Necht' $X = (\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_X)$ a $Y = (\mathbb{F}^m, \|\cdot\|_Y)$.

- (1) Ukažte, že každý operátor $T \in L(X, Y)$ je reprezentován nějakou maticí typu $n \times m$, tj. existuje A matice typu $n \times m$, že pro každé $x \in X$ je $Tx = Ax$ (vektory píšeme do sloupce).
- (2) Ukažte, že X^* lze reprezentovat jako \mathbb{F}^n (s nějakou normou) a podobně Y^* lze reprezentovat jako \mathbb{F}^m (s nějakou normou).
- (3) Necht' $T \in L(X, Y)$. Pak T' lze pomocí předchozího bodu interpretovat jako lineární operátor $\mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$. Jakou maticí je reprezentován operátor T' , je-li T reprezentován maticí A ?

Příklad 31. Necht' $X = (\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2)$ a $Y = (\mathbb{F}^m, \|\cdot\|_2)$. Necht' $T \in L(X, Y)$ je reprezentován maticí A . Jakou maticí je reprezentován hilbertovsky adjungovaný operátor T^* ?

Příklad 32. Necht' K, L jsou dva (metrické) kompaktní prostory a $\varphi : K \rightarrow L$ spojitě zobrazení. Definujme operátor $T : \mathcal{C}(L) \rightarrow \mathcal{C}(K)$ předpisem $T(f) = f \circ \varphi$. Interpretujte duální operátor T' jako operátor $\mathcal{M}(K) \rightarrow \mathcal{M}(L)$ (pomocí Věty II.23). Ukažte, že při této interpretaci pro $\mu \in \mathcal{M}(K)$ je $T'(\mu) = \varphi(\mu)$ (obraz míry μ při zobrazení φ).

Návod: Dokažte, že $\varphi(\mu)$ je regulární borelovská míra a použijte větu o integraci podle obrazu míry.

Příklad 33. Necht' X je normovaný lineární prostor a $P \in L(X)$ je projekce.

- (1) Ukažte, že P' je projekce na X' .
- (2) Ukažte, že $(PX)^*$ je izomorfní $P'X^*$.
- (3) Pokud $\|P\| = 1$, ukažte, že $(PX)^*$ je izometrické $P'X^*$.

Příklad 34. Necht' H je Hilbertův prostor a $P \in L(H)$ je projekce.

- (1) Ukažte, že P^* je také projekce.
- (2) Ukažte, že P je ortogonální projekce (tj. $\ker P = (P(H))^\perp$), právě když $P^* = P$.

Příklad 35. Necht' $p_1, p_2 \in [1, \infty)$, $p_1 < p_2$.

- (1) Ukažte, že $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$.
- (2) Necht' $T : \ell^{p_1} \rightarrow \ell^{p_2}$ je „identita“. Ukažte, že $T \in L(\ell^{p_1}, \ell^{p_2})$ a $\|T\| = 1$.
- (3) Vyjádřete T' jako prvek $L(\ell^{q_2}, \ell^{q_1})$ pro odpovídající $q_1, q_2 \in (1, \infty]$ s použitím reprezentace duálů podle oddílu II.3 z přednášky.

Návod: (1), (2) Ukažte $B_{\ell^{p_1}} \subset B_{\ell^{p_2}}$.

Příklad 36. Necht' $p \in [1, \infty)$.

- (1) Ukažte, že $\ell^p \subset c_0$.
- (2) Necht' $T : \ell^p \rightarrow c_0$ je „identita“. Ukažte, že $T \in L(\ell^p, c_0)$ a $\|T\| = 1$.
- (3) Vyjádřete T' jako prvek $L(\ell^q, \ell^q)$ pro odpovídající $q \in (1, \infty]$ s použitím reprezentace duálů podle oddílu II.3 z přednášky.

Příklad 37. Necht' $p_1, p_2 \in [1, \infty)$, $p_1 < p_2$ a $r > 0$.

- (1) Ukažte, že $L^{p_2}([0, r]) \subset L^{p_1}([0, r])$.
- (2) Necht' $T : L^{p_2}([0, r]) \rightarrow L^{p_1}([0, r])$ je „identita“. Ukažte, že $T \in L(L^{p_2}([0, r]), L^{p_1}([0, r]))$ a spočtete $\|T\|$.
- (3) Vyjádřete T' jako prvek $L(L^{q_1}([0, r]), L^{q_2}([0, r]))$ pro odpovídající $q_1, q_2 \in (1, \infty]$ s použitím reprezentace duálů podle oddílu II.3 z přednášky.

Návod: (1), (2) Použijte Hölderovu nerovnost.

Příklad 38. Necht' H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a T je izometrie H_1 na H_2 . Ukažte, že $T^* = T^{-1}$.

Návod: Použijte polarizační identitu.

Příklad 39. Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $S \in L(Y^*, X^*)$. Ukažte, že existuje $T \in L(X, Y)$ splňující $S = T'$, právě když $S'(\mathcal{K}_X(X)) \subset \mathcal{K}_Y(Y)$.

Návod: Pro implikaci \Rightarrow využijte Větičku III.19(d) z přednášky, pro opačnou implikaci položte $T = \mathcal{K}_Y^{-1} S' \mathcal{K}_X$ a ověřte, že $T' = S$.

Příklad 40. Necht' X, Y jsou Banachovy prostory. Ukažte, že zobrazení $T \mapsto T'$ zobrazuje $L(X, Y)$ na $L(Y^*, X^*)$, právě když Y je reflexivní nebo $X = \{\mathbf{o}\}$.

*Návod: Pro implikaci \Leftarrow použijte předchozí příklad. Pro opačnou implikaci předpokládejte, že $\varphi \in Y^{**} \setminus \mathcal{K}(Y)$ a $x^* \in X^* \setminus \{\mathbf{o}\}$ a uvažte operátor $S \in L(Y^*, X^*)$ definovaný vzorcem $S(y^*) = \varphi(y^*)x^*$.*

Příklad 41. Necht' $A \subset c_0$. Ukažte, že A je relativně kompaktní, právě když

$$\left(\sup_{x \in A} |x_n| \right)_{n=1}^{\infty} \in c_0.$$

Návod: Necht' (a_n) je uvedená posloupnost. Pro důkaz implikace \Leftarrow dokažte, že A je totálně omezená s využitím toho, že $a_n \rightarrow 0$ a totální omezenosti omezených množin v konečněrozměrném prostoru. Pro důkaz opačné implikace předpokládejme, že $a_n \not\rightarrow 0$. Pak existuje $\varepsilon > 0$, že pro nekonečně mnoho n je $a_n > \varepsilon$. Ukažte, že pak v množině A existuje $\frac{\varepsilon}{2}$ -diskrétní posloupnost.

Příklad 42. Necht' $p \in [1, \infty)$ a $A \subset \ell^p$. Ukažte, že A je relativně kompaktní, právě když je omezená a navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ konverguje stejnoměrně pro $x \in A$.

Návod: Pro implikaci \Rightarrow použijte totální omezenost a konvergenci uvedené řady pro každé $x \in A$. Pro implikaci \Leftarrow použijte totální omezenost omezených množin v konečněrozměrných prostorech k důkazu totální omezenosti A .

Příklad 43. Necht' $p \in [1, \infty)$. Ukažte, že existuje $A \subset \ell^p$ relativně kompaktní, pro kterou

$$\left(\sup_{x \in A} |x_n| \right)_{n=1}^{\infty} \notin \ell^p.$$

Návod: Použijte následující postřeh: Pokud (x_n) je posloupnost v X a $x_n \rightarrow x$, pak množina $\{x\} \cup \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ je kompaktní.

Příklad 44. Necht' c je prostor konvergentních posloupností a $A \subset c$. Ukažte, že A je relativně kompaktní, právě když je omezená a navíc posloupnost (x_n) konverguje stejnoměrně pro $x \in A$.

Příklad 45. Ukažte, že množina

$$A = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]); \|f\|_{\infty} \leq C \text{ \& } f \text{ je } D\text{-lipschitzovská}\}$$

je kompaktní v $\mathcal{C}([0, 1])$ pro každou volbu $C > 0$ a $D > 0$.

Návod: Použijte větu Arzelà-Ascoliovu.

Příklad 46. Ukažte, že „identita“ $\mathcal{C}^1([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ je kompaktní operátor.

Návod: Ukažte, že funkce v obrazu jednotkové koule jsou 1-lipschitzovské a použijte předchozí příklad.

Příklad 47. Necht' $k \in \mathcal{C}([0, 1]^2)$. Pro $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ definujme

$$Tf(t) = \int_0^1 f(s)k(s, t) ds, \quad t \in [0, 1].$$

- (1) Ukažte, že $T \in L(\mathcal{C}([0, 1]))$.
- (2) Ukažte, že operátor T je kompaktní.

Návod: (1) K důkazu spojitosti funkce Tf lze použít například větu o spojitě závislosti integrálu na parametru. Nebo lze rovnou dokazovat silnější tvrzení v (2). (2) Použijte větu Arzelà-Ascoliovu. Stejnou spojitost příslušných funkcí odvoďte ze stejnoměrné spojitosti k .

Příklad 48. Necht' $k \in L^2([0, 1]^2)$. Pro $f \in L^2([0, 1])$ definujme

$$Tf(t) = \int_0^1 f(s)k(s, t) ds, \quad t \in [0, 1].$$

- (1) Uka'zte, že $T \in L(L^2([0, 1]))$ a $\|T\| \leq \|k\|_2$.
- (2) Uka'zte, že operátor T je kompaktní.
- (3) Vyjádřete adjungovaný operátor T^* .

Návod: (1) Nejprve s použitím Fubiniovy věty a Cauchy-Schwarzovy nerovnosti uka'zte, že funkce $(s, t) \mapsto f(s)k(s, t)$ je integrovatelná na $[0, 1]^2$. Následně použijte podobný výpočet k důkazu toho, že $Tf \in L^2([0, 1])$ a k odhadu normy T . (2) Uka'zte, že funkce tvaru $(s, t) \mapsto \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \chi_{A_j}(s) \chi_{B_j}(t)$ jsou husté v $L^2([0, 1]^2)$. Necht' (k_n) je posloupnost funkcí tohoto tvaru konvergující v $L^2([0, 1]^2)$ ke k . Definujte operátory T_n stejným vzorcem jako T s k_n na místě k . Uka'zte, že T_n jsou konečnědimenzionální a $T_n \rightarrow T$ v $L(L^2([0, 1]))$ (s využitím odhadu normy z (1)).

K ODDÍLŮM III.6 A III.7 – SPEKTRUM OMEZENÉHO LINEÁRNÍHO OPERÁTORU, SPEKTRUM KOMPAKTNÍCH OPERÁTORŮ

Poznámka. V tomto oddílu jsou všechny prostory komplexní.

Příklad 49. Necht' X je Banachův prostor a $S_1, S_2, T \in L(X)$ splňují $S_1T = TS_2 = \text{Id}$. Uka'zte, že $S_1 = S_2 = T^{-1}$, a tedy T je invertibilní.

Příklad 50. Necht' X je Banachův prostor a $P \in L(X)$ je projekce. Popište $\sigma(P)$, $\sigma_p(P)$ a napište vzorec pro rezolventní funkci.

Příklad 51. Necht' X je Banachův prostor a $T \in L(X)$.

- (1) Necht' T je invertibilní (tj. T je izomorfismus X na X). Uka'zte, že

$$\sigma(T^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda}; \lambda \in \sigma(T) \right\}.$$

- (2) Necht' T je izometrie X na X . Uka'zte, že $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$.

Příklad 52. Necht' X je Banachův prostor a $T \in L(X)$. Uka'zte, že platí

$$\sigma(T^2) = \{\lambda^2; \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Návod: Uka'zte, že $\lambda^2 \text{Id} - T^2 = (\lambda \text{Id} - T)(\lambda \text{Id} + T) = (\lambda \text{Id} + T)(\lambda \text{Id} - T)$. Z toho odvoďte, že $\lambda^2 \text{Id} - T^2$ je invertibilní, právě když $\lambda \text{Id} + T$ i $\lambda \text{Id} - T$ jsou invertibilní.

Příklad 53. Necht' H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$. Uka'zte, že $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda}; \lambda \in \sigma(T)\}$.

Příklad 54. Necht' $X = c_0$ nebo $X = \ell^p$ pro nějaké $p \in [1, \infty)$. Necht' (a_n) je omezená posloupnost komplexních čísel. Definujme operátor $T \in L(X)$ předpisem

$$T((x_n)) = (a_n x_n), \quad (x_n) \in X.$$

- (1) Uka'zte, že T je opravdu spojitý lineární operátor na X splňující $\|T\| = \|(a_n)\|_\infty$.
- (2) Uka'zte, že T je kompaktní, právě když $a_n \rightarrow 0$.
- (3) Najděte $\sigma_p(T)$.
- (4) Najděte $\sigma(T)$.

Návod: (2) Pokud $a_n \not\rightarrow 0$, použijte Větičku III.22, pokud $a_n \rightarrow 0$, uka'zte, že T je limitou konečnědimenzionálních operátorů (v normě $L(X)$). (3,4) Vyzkoumejte, za jakých podmínek je T prostý respektive invertibilní; a pak využijte faktu, že operátor $\lambda \text{Id} - T$ je podobného tvaru.

Příklad 55. Necht' $X = L^p([0, 1])$ pro nějaké $p \in [1, \infty)$ a $g \in L^\infty([0, 1])$. Definujme operátor $T \in L(X)$ předpisem

$$T(f) = fg, \quad f \in X.$$

- (1) Ukažte, že T je opravdu spojitý lineární operátor na X splňující $\|T\| = \|g\|_\infty$.
- (2) Ukažte, že $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; g^{-1}(\lambda) \text{ je kladné míry}\}$.
- (3) Ukažte, že $\sigma(T)$ je esenciální obor hodnot g .
- (4) Ukažte, že T je kompaktní pouze v případě $g = 0$.

Návod: (3) Nejprve zjistěte, kdy T je invertibilní. Přitom odvoďte, jaký musí být tvar T^{-1} a použijte na inverzní operátor odhady z (1). Dále použijte fakt, že operátor $\lambda \text{Id} - T$ je téhož typu jako T . (4) Ukažte, že pokud má T nenulové vlastní číslo, pak jeho zúžení na vhodný nekonečněrozměrný podprostor X je izomorfismus (využijte (2)), a tedy T není kompaktní. Z Věty III.32 z přednášky a (3) pak odvoďte, že, je-li T kompaktní, esenciální obor hodnot g musí být $\{0\}$.

Příklad 56. Necht' H je Hilbertův prostor a $T \in K(H) \setminus \{0\}$. Necht'

$$Tx = \sum_{k=1}^N \alpha_n \langle x, x_n \rangle y_n, \quad x \in H$$

je Schmidtova reprezentace operátoru T .

- (1) Pokud $N = \infty$, ukažte, že $\alpha_n \rightarrow 0$. Z toho odvoďte, že můžeme předpokládat, že posloupnost (α_n) je nerostoucí. (Dále to skutečně předpokládejme.)
- (2) Ukažte, že $\alpha_1 = \|T\|$.
- (3) Ukažte, že vzorec $T_m x = \sum_{k=1}^m \alpha_n \langle x, x_n \rangle y_n$, $x \in H$ (pro $m \in \mathbb{N}$, $m \leq N$) definuje konečnědimenzionální operátor a $\dim R(T_m) = m$.
- (4) Ukažte, že T_m je operátor s dimenzí oboru hodnot nejvýše m nejbližší k operátoru T .
- (5) Ukažte, že

$$\alpha_m = \text{dist}(T, \{S \in L(H); \dim R(S) < m\}).$$

Návod: (1) Použijte metodu konstrukce Schmidtovy reprezentace a Větu III.35(b). (2) Pro nerovnost \geq použijte Besselovu nerovnost. (4) Z (2) odvoďte, že $\|T - T_m\| = \alpha_{m+1}$. Dále, je-li $\dim R(S) \leq m$, pak existuje $y \in \text{span}\{x_1, \dots, x_{m+1}\}$, pro které je $\|y\| = 1$ a $Sy = 0$. Spočtěte, že $\|(T - S)y\| \geq \alpha_{m+1}$. (5) Odvoďte z (4) (a (2)).