ÚVOD DO FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2022/2023

PŘÍKLADY KE KAPITOLE IV

Příklad 1. Nechť $U \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina a $K \subset U$ kompaktní množina. Ukažte, že existuje $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, pro kterou platí $0 \le g \le 1$, $\operatorname{spt} g$ je kompaktní podmnožina U a $g|_K = 1$.

`Návod:` *Pokud U je otevřená koule, tvrzení odvoďte z Příkladu IV.2(4) z přednášky. V obecném případě s využitím kompaktnosti K ukažte, že existují $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k \in K$ a kladná čísla $r_1, \dots, r_k$ taková, že otevřené koule $U(\boldsymbol{x}_j, r_j)$ pokrývají K a uzavřené koule $\overline{U(\boldsymbol{x}_j, 2r_j)}$ jsou obsaženy v U. Na tyto dvojice aplikujte zmíněný Příklad IV.2(4), dostanete funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_k$. Ukažte, že lze vzít $g = h_3 \circ (\varphi_1 + \dots + \varphi_k)$, kde h_3 je funkce z Příkladu IV.2(3).*

Příklad 2. Nechť $B \subset \mathbb{R}^d$ je borelovská množina konečné míry. Nechť $p \in [1, \infty)$. Ukažte, že existuje posloupnost (g_n) v $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, která konverguje k χ_B v $L^p(\mathbb{R}^n)$.

`Návod:` *Nechť $\varepsilon > 0$. Z regularity Lebesgueovy míry existuje kompaktní množina K a otevřená množina U, že $K \subset B \subset U$ a $\lambda^d(U \setminus K) < \varepsilon$. Na dvojici K a U použijte předchozí příklad.*

Příklad 3. Dokažte hustotu $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ v $L^p(\mathbb{R}^d)$ pro $p \in [1, \infty)$ (tj. Důsledek IV.7 z přednášky) bez použití konvoluce.

`Návod:` *Použijte hustotu jednoduchých funkcí a předchozí příklad.*