

Úvod – co je funkcionální analýza a k čemu je dobrá (a také obsah přednášky a znalosti potřebné předem)

CO JE FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA?

Funkcionální analýza je velmi široká oblast matematiky, která se prolíná s mnoha jinými partiiemi. Mezi předměty jejího zájmu patří:

- Normované lineární prostory, zejména nekonečněrozměrné.
- Zobrazení mezi těmito prostory (tj. operátory), a to lineární i nelineární.
- Normované lineární prostory s dodatečnou strukturou (např. algebraickou – Banachovy algebry, Banachovy svazy atp.).
- Prostory abstraktnější než normované prostory (lineární topologické prostory atp.).
- A ještě leccos jiného.

K ČEMU TO JE DOBRÉ?

- Je to pěkné a zajímavé, stejně jako celá matematika.
- Dává to nové pohledy na matematické problémy různého druhu, umožňuje to problémy jinak formulovat a je to zdrojem účinných metod řešení. Hlavní výhodou funkcionální analýzy je asi skutečnost, že i s dost složitými objekty (jako jsou posloupnosti, funkce i rozličná zobrazení) umožňuje pracovat jako s body v prostoru s geometrickou strukturou. To se hodí například v následujících případech:
 - Lze formulovat a dokázat tvrzení, že většina spojitých funkcí na intervalu $[0, 1]$ nemá derivaci v žádném bodě.
 - Hledání řešení nějaké diferenciální rovnice lze pojmout jako hledání vhodného bodu ve vhodném prostoru.
 - Problém aproximace složité funkce jednodušší funkcí (třeba polynomem daného stupně) lze interpretovat jako hledání nejbližšího bodu ve vhodné množině.

STRUČNÝ (ORIENTAČNÍ) OBSAH PŘEDNÁŠKY

- I. Banachovy a Hilbertovy prostory – norma, normované prostory, Banachovy prostory a jejich příklady, spojitá lineární zobrazení, skalární součin a norma jím indukovaná, Hilbertovy prostory a jejich struktura, prostory konečné dimenze
- II. Spojité lineární funkcionály a dualita – Hahn-Banachova věta a její důsledky, druhý duál, kanonické vnoření do druhého duálu, reflexivita, reprezentace duálů klasických prostorů, slabá a slabá* konvergence, princip stejnoměrné omezenosti, vybírání slabě konvergentní podposloupnosti

- III. Omezené lineární operátory – kvocient normovaného prostoru, vztah kvocientů a podprostorů, věta o otevřeném zobrazení, věta o uzavřeném grafu, projekce, topologické doplňky, komplementované podprostory, duální operátory, kompaktní operátory, spektrum operátoru, spektrální teorie (zejména) kompaktních operátorů
- IV. Fourierova transformace – Fourierova transformace funkcí z L^1 , Schwartzův prostor, Plancherelova transformace na L^2

ORIENTAČNÍ PŘEHLED POTŘEBNÝCH ZNALOSTÍ

- Diferenciální počet jedné a několika reálných proměnných (limita, spojitost, derivace, parciální derivace, funkce třídy C^k a C^∞ atp.)
- Konvergence posloupností a řad reálných či komplexních čísel, konvergence posloupností a řad funkcí (bodová, stejnoměrná, lokálně stejnoměrná)
- Integrovanost jedné reálné proměnné (primitivní funkce, určitý integrál)
- Lebesgueova míra a Lebesgueův integrál na \mathbb{R}^d
- Teorie míry a abstraktní Lebesgueův integrál, znaménkové míry, Hahnův rozklad, absolutní variace, Radon-Nikodýmova věta
- Vektorové prostory nad \mathbb{R} a nad \mathbb{C} , lineární zobrazení
- Metrické prostory (metrika, spojitost, otevřené a uzavřené množiny, kompaktní prostory, úplné prostory, řídké množiny a množiny první kategorie, Baireova věta, borelovské množiny)
- Něco málo z teorie množin – spočetné a nespočetné množiny, Zornovo lemma

DALŠÍ PARTIE MATEMATIKY VYUŽÍVANÉ V POKROČILÉ FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZE

- Komplexní analýza (něco z ní je potřeba ve spektrální teorii, je zdrojem příkladů Banachových prostorů i obecnějších typů prostorů, naopak i v ní se používají metody funkcionální analýzy)
- Obecná topologie (bez znalosti a porozumění topologickým pojmům jako jsou třeba kompaktnost, součinná topologie, báze okolí, je studium pokročilejší funkcionální analýzy těžko představitelné)
- Něco více z teorie množin (například ordinální čísla či některé principy nekonečné kombinatoriky jsou zdrojem zajímavých příkladů Banachových prostorů)
- Něco z algebry (hodí se při studiu Banachových algeber, C^* -algeber i obecnějších struktur)