

# Věta I 6

(1)  $X$  normovaný prostor nad  $\mathbb{F}$ ,  $q: X \rightarrow [0, \infty)$  splňuje

$$(i) \quad q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(ii) \quad q(\lambda x) = |\lambda| \cdot q(x) \text{ pro } x \in X, \lambda \in \mathbb{F}$$

$$(iii') \quad \{x \in X, q(x) \leq 1\} \text{ je konvexní}$$

Je třeba dokázat trojúhelníkovou nerovnost, tj.  $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$

pro  $x, y \in X$ . Rozdělíme případy:

- $x = 0 \Rightarrow q(x) = 0$ , platí rovnost

- $y = 0 \Rightarrow q(y) = 0$ , platí rovnost

- $x \neq 0, y \neq 0$ : Pak  $q(x) > 0, q(y) > 0$  dle (i)

označme  $B := \{x \in X, q(x) \leq 1\}$ , dle (iii') je  $B$  konvexní

Máme  $\frac{x}{q(x)} \in B, \frac{y}{q(y)} \in B$ , protože dle (ii) je

$$q\left(\frac{x}{q(x)}\right) = \frac{1}{q(x)} \cdot q(x) = 1, \text{ stejně pro } y$$

$$B \text{ konvexní} \Rightarrow \underbrace{\frac{q(x)}{q(x)+q(y)} \cdot \frac{x}{q(x)} + \frac{q(y)}{q(x)+q(y)} \cdot \frac{y}{q(y)}}_{= \frac{x+y}{q(x)+q(y)}} \in B$$

$$\text{tedy } \frac{x+y}{q(x)+q(y)} \in B, \text{ tj. } q\left(\frac{x+y}{q(x)+q(y)}\right) \leq 1$$

$$\parallel \frac{q(x+y)}{q(x)+q(y)} \parallel$$

$$\Rightarrow q(x+y) \leq q(x) + q(y) \quad \rfloor$$

$$(2) \quad X \text{ NLP} \Rightarrow \|x\| = \inf \left\{ t > 0, \frac{1}{t}x \in B_X \right\} = \inf \left\{ t > 0, \frac{1}{t}x \in U \right\}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{1}{t}x \in B_X \Leftrightarrow \left\| \frac{x}{t} \right\| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{t}\|x\| \leq 1 \Leftrightarrow \|x\| \leq t \\ \frac{1}{t}x \in U \Leftrightarrow \left\| \frac{x}{t} \right\| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{t}\|x\| < 1 \Leftrightarrow \|x\| < t \end{array} \right.$$

Tedy: pro  $x = 0$  lze ale množinu  $(0, \infty)$ , pro  $x \neq 0$  je pak množina  $[\|x\|, +\infty)$  a dle (1)  $(\|x\|, +\infty)$

Příklad I.7  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in [1, \infty)$ . Pro  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$  označme

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}$$

Paž  $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_p)$  je separabilní Banachov prostor.

Dk: ① funkce  $\varphi(t) = t^p$  je konvexní a rostoucí na  $[0, \infty)$

$\Gamma$   $\varphi$  je spojitá na  $[0, \infty)$ ,  $\varphi(0) = 0$

$\varphi'(t) = p \cdot t^{p-1} > 0$  na  $(0, \infty) \Rightarrow \varphi$  je rostoucí na  $[0, \infty)$

Namc  $\varphi'_+(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi'(t) = 0 \Rightarrow \varphi'$  je spojitě rozšířen na  $[0, \infty)$

$\varphi''(t) = p(p-1)t^{p-2} \geq 0$  na  $(0, \infty) \Rightarrow \varphi'$  je neubývajícím na  $[0, \infty)$   
 $\Rightarrow \varphi$  konvexní na  $[0, \infty)$

$\nearrow$   
 $p \geq 1$

Pozn.:  $p=1 \Rightarrow \varphi$  lineární ( $\varphi(t)=t$ )

$p > 1 \Rightarrow \varphi'' > 0$  na  $(0, \infty) \Rightarrow \varphi'$  rostoucí na  $(0, \infty) \Rightarrow \varphi$  je konvexní na  $(0, \infty)$

②  $\|\cdot\|_p$  je norma na  $\mathbb{F}^n$

$\Gamma$  použijeme kritérium I.6 (1):  $\|\cdot\|_p: \mathbb{F}^n \rightarrow [0, \infty)$ ;

$$(a) \quad \|(x_1, \dots, x_n)\|_p = 0 \Leftrightarrow |x_1|^p + \dots + |x_n|^p = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0 \\ \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$$

$$(b) \quad \|\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n)\|_p = \|(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)\|_p = \\ = (|\lambda x_1|^p + \dots + |\lambda x_n|^p)^{1/p} = (|\lambda|^p (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p))^{1/p} = \\ = |\lambda| (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p} = |\lambda| \cdot \|(x_1, \dots, x_n)\|_p$$

(c)  $B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n; \|(x_1, \dots, x_n)\|_p \leq 1\}$  je konvexní:

$\Gamma$  ověříme si, že  $B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n; \|(x_1, \dots, x_n)\|_p^p \leq 1\}$

$(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in B, t \in [0, 1]$

$$\text{Paž: } \|t(a_1, \dots, a_n) + (1-t)(b_1, \dots, b_n)\|_p^p = \|(ta_1 + (1-t)b_1, \dots, ta_n + (1-t)b_n)\|_p^p \\ = (|ta_1 + (1-t)b_1|^p + \dots + |ta_n + (1-t)b_n|^p)$$

$$\leq (t|a_1| + (1-t)|b_1|)^p + \dots + (t|a_n| + (1-t)|b_n|)^p$$

$\nearrow \Delta$ -nerovnost v  $\mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^p$  je rastoucí na  $[0, \infty)$  dle ①

$$\leq (t|a_1|^p + (1-t)|b_1|^p) + \dots + (t|a_n|^p + (1-t)|b_n|^p)$$

$\nearrow$  konvexní funkce  $x \mapsto x^p$ , viz ①

$$= t(|a_1|^p + \dots + |a_n|^p) + (1-t)(|b_1|^p + \dots + |b_n|^p) \leq t + (1-t) = 1$$

$(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in B$

$$\text{Tož } t(a_1, \dots, a_n) + (1-t)(b_1, \dots, b_n) \in B \quad \square$$

③ úplnost:

$$(x_{k,1}, \dots, x_{k,n})_{k=1}^\infty \quad \|\cdot\|_p \text{-Cauchyovská}$$

$$\Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\} : (x_{k,j})_k \text{ Cauchyovská v } \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{(pro každé } k, l) \quad |x_{k,l} - x_{l,l}| &\leq (|x_{k,1} - x_{l,1}|^p + \dots + |x_{k,n} - x_{l,n}|^p)^{1/p} \\ &= \|(x_{k,1}, \dots, x_{k,n}) - (x_{l,1}, \dots, x_{l,n})\|_p \end{aligned}$$

úplně v  $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \forall j \exists x_j \in \mathbb{R} : x_{k,j} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_j \quad \text{a} \quad |x_{k,j} - x_j| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Pak } \|(x_{k,1}, \dots, x_{k,n}) - (x_1, \dots, x_n)\|_p = (|x_{k,1} - x_1|^p + \dots + |x_{k,n} - x_n|^p)^{1/p} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow (x_{k,1}, \dots, x_{k,n}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (x_1, \dots, x_n) \text{ v } (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$$

④ separabilita:

•  $\mathbb{R} = \mathbb{R}$  --- prvky s racionálními souřadnicemi. Anzámocetná hrdla možná  
(v  $\mathbb{Q}^n$ )

•  $\mathbb{R} = \mathbb{C}$  ---  $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n : \text{Re } x_j \in \mathbb{Q}, \text{Im } x_j \in \mathbb{Q} \text{ pro } j=1, \dots, n\}$   
je spčetná hrdla

$$\Gamma (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists y_1, \dots, y_n \in \mathbb{Q} \quad |x_j - y_j| < \frac{\varepsilon}{n^{1/p}} \text{ pro } j=1, \dots, n$$

$$\text{je } \|(x_1, \dots, x_n) - (y_1, \dots, y_n)\|_p = (|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_n - y_n|^p)^{1/p} < (n \cdot (\frac{\varepsilon}{n^{1/p}})^p)^{1/p} = \varepsilon$$

pro  $\mathbb{C}^n$  je to podobné  $\square$