

Věta I.8 Necht $(X, \|\cdot\|)$ je Banachov prostor. Necht $\phi: X \rightarrow [0, \infty]$ je funkce splňující:

(a) ϕ splňuje axiomy normy, přičemž bod (a) odpovídá je pro $\lambda \neq 0$

$$(tj. \phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; \quad \phi(\lambda x) = |\lambda| \phi(x) \text{ pro } x \in X, \lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}, \\ \phi(x+y) \leq \phi(x) + \phi(y))$$

(b) $\phi(x) \geq \|x\|$ pro $x \in X$

(c) ϕ je zobrazení polospojitém $(X, \|\cdot\|)$, tj. $\forall C \in \mathbb{R}: \{x \in X, \phi(x) \leq C\}$ je uzavřený

Označme $Y = \{x \in X, \phi(x) < \infty\}$. Pak (Y, ϕ) je Banachov prostor.

Dk: ① Y je podprostor X

$$\text{Plyne z (a): } \phi(0) = 0 \Rightarrow 0 \in Y$$

$$x, y \in Y \Rightarrow \phi(x+y) \leq \phi(x) + \phi(y) < \infty \Rightarrow x+y \in Y$$

$$x \in Y, \lambda \in \mathbb{F} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \Rightarrow \lambda \cdot x = 0 \in Y \\ \lambda \neq 0 \Rightarrow \phi(\lambda x) = |\lambda| \phi(x) < \infty \Rightarrow \lambda x \in Y \end{cases}$$

② ϕ je norma na Y

Plyne z (a) ... axiomy normy jsou splněny, bod (a) trvá i pro $\lambda = 0$

③ (Y, ϕ) je úplný

$$\{x_n\} \subset Y \quad \phi\text{-Cauchyovská}$$

Dle (b) máme $\|\cdot\| \leq \phi$, tedy $\{x_n\}$ je i $\|\cdot\|$ -Cauchyovská

Protože $(X, \|\cdot\|)$ je Banachov, existuje $x \in X$, že $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$

Pak $x \in Y$:

$$\{x_n\} \text{ } \phi\text{-Cauchyovská} \Rightarrow \{x_n\} \text{ } \phi\text{-omezená,}$$

$$tj. \exists C > 0 \quad \forall n: \phi(x_n) \leq C.$$

$$\text{Dle (c) je pak i } \phi(x) \leq C < \infty \Rightarrow x \in Y$$

$$\bullet \text{ Můžeme } x_n \xrightarrow{\phi} x \quad (tj. \phi(x_n - x) \rightarrow 0)$$

$$\underline{\forall \varepsilon > 0: \exists n_0 \quad \forall m, n \geq n_0: \phi(x_m - x_n) < \varepsilon}$$

$$\underline{m \geq n_0 \text{ pevné} \Rightarrow x_m - x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_m - x}$$

$$\text{Přitom } \phi(x_m - x_n) < \varepsilon \text{ pro } n \geq n_0 \xRightarrow{(c)} \phi(x_m - x) \leq \varepsilon.$$

$$\text{Dle definice limity } \phi(x_m - x) \rightarrow 0 \quad \downarrow$$

Príklad I.9 (1) $p \neq \Gamma$ možina, $p \in [1, \infty)$
 $\ell^p(\Gamma) = \{f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R} ; \sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p < \infty\}$

$$\|f\|_p := \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p \right)^{1/p}, \quad f \in \ell^p(\Gamma)$$

$\Rightarrow (\ell^p(\Gamma), \|\cdot\|_p)$ je Banachov priestor

Dk: ① Pripomenie, že $\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p = \sup \left\{ \sum_{\gamma \in A} |f(\gamma)|^p ; A \subset \Gamma \text{ konečná} \right\}$

② $f \in \ell^p(\Gamma) \Rightarrow \forall \gamma \in \Gamma : |f(\gamma)| \leq \|f\|_p$, teda $\|f\|_\infty \leq \|f\|_p$
 spíše $f \in \ell^\infty(\Gamma)$. Máme teda $\ell^p(\Gamma) \subset \ell^\infty(\Gamma)$

③ Pro $f \in \ell^\infty(\Gamma)$ položíme $\phi(f) = \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p \right)^{1/p} = \sup_{\substack{A \subset \Gamma \\ \text{konečná}}} \left(\sum_{\gamma \in A} |f(\gamma)|^p \right)^{1/p}$

Ukážeme, že ϕ splňuje predchádzajúce Všetky I. 8.

zrejme $\phi: \ell^\infty(\Gamma) \rightarrow [0, \infty]$. Dá sa

(a) ukázať, že: (i) $\phi(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ --- je jasné

(ii) $\phi(\lambda f) = |\lambda| \cdot \phi(f)$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f \in \ell^\infty(\Gamma)$
 --- je jasné

(iii) $\phi(f+g) \leq \phi(f) + \phi(g)$

$$A \subset \Gamma \text{ konečná} \Rightarrow \phi_A(f) = \left(\sum_{\gamma \in A} |f(\gamma)|^p \right)^{1/p}$$

$$\text{Pre } \phi_A(f+g) \leq \phi_A(f) + \phi_A(g) \leq \phi(f) + \phi(g)$$

↑ príklad I. 7

$$\text{Príklad 2. Supremum: } \phi(f+g) \leq \phi(f) + \phi(g)$$

(b) $\phi(f) \geq \|f\|_\infty$ --- viz ②

(c) $c \in \mathbb{R} \Rightarrow \{f \in \ell^\infty(\Gamma), \phi(f) \leq c\}$ je uzavretá

Ukážeme, že doplnok je otvorený:

$$\phi(f) > c \Rightarrow \exists A \subset \Gamma \text{ konečná: } \phi_A(f) > c$$

Preto ϕ_A je spojité na $\ell^\infty(\Gamma)$, teda $\exists U$ okolo f , že

$$\forall g \in U: \phi_A(g) > c, \text{ a teda } \phi(g) > c$$

Aplikáciou Všetkých I. 8 dostávame, že $\ell^p(\Gamma)$ je Banachov priestor.