

Příklad I.10: Prostor $L^p(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{R})$ je normovaný lineární prostor, $p \in [1, \infty]$

① $L^0(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{R}) :=$ třída ekvivalence Σ -měřitelných fun. $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$
... topologický prostor

② pro $[f] \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{R})$ a $p \in [1, \infty)$ položíme $\varphi_p([f]) := \int_{\Omega} |f|^p d\mu \in [0, \infty]$
a $B_p = \{[f] \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{R}) : \varphi_p([f]) \leq 1\}$

Pak B_p je konvexní množina

$$\Gamma [f], [g] \in B_p, t \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow \varphi_p(t[f] + (1-t)[g]) = \varphi_p([tf + (1-t)g]) = \int_{\Omega} |tf + (1-t)g|^p d\mu$$

$$\leq \int_{\Omega} (t|f| + (1-t)|g|)^p d\mu \leq \int_{\Omega} t|f|^p + (1-t)|g|^p d\mu$$

Δ -nerovnost w.f., monotónie integrálu

konvexita $x \mapsto x^p$ (viz Příklad I.7)
+ monotónie integrálu

$$= t \int_{\Omega} |f|^p d\mu + (1-t) \int_{\Omega} |g|^p d\mu = t \varphi_p([f]) + (1-t) \varphi_p([g]) \leq t + 1 - t = 1$$

$$\text{Tož } t[f] + (1-t)[g] \in B_p \quad \Gamma$$

③ $[f] \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \varphi_p(\lambda[f]) = |\lambda|^p \varphi_p([f])$

$$\Gamma \varphi_p(\lambda[f]) = \varphi_p([\lambda f]) = \int_{\Omega} |\lambda f|^p d\mu = |\lambda|^p \int_{\Omega} |f|^p d\mu = |\lambda|^p \cdot \varphi_p([f]) \quad \Gamma$$

④ $L^p(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{R}) = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda \cdot B_p$ a je to velkový podprostor $L^0(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{R})$

$$\Gamma [f] \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{R}) \Leftrightarrow \varphi_p([f]) < \infty \Leftrightarrow \exists \lambda > 0 \quad \varphi_p([f]) \leq \lambda$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda > 0 : \frac{1}{\lambda} \varphi_p([f]) \leq 1 \Leftrightarrow \exists \lambda > 0 : \frac{[f]}{\lambda^{1/p}} \in B_p \Leftrightarrow \exists \lambda > 0 [f] \in \lambda^{1/p} \cdot B_p$$

③^u $\varphi_p([f]) < \infty$

Dále: $\varphi_p([0]) = 0 \Rightarrow [0] \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{R})$

$[f] \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$ — $\lambda = 0 \Rightarrow \lambda[f] = [0] \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{R})$

$$\lambda \neq 0 \Rightarrow \varphi_p(\lambda[f]) = |\lambda|^p \varphi_p([f]) < \infty$$

③

$$\Rightarrow \lambda[f] \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{R})$$

$$[f], [g] \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu) \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 > 0 \quad \frac{[f]}{\lambda_1}, \frac{[g]}{\lambda_2} \in B_p$$

homogenita B_p

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \Rightarrow \underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{[f]}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{[g]}{\lambda_2}}_{= \frac{[f] + [g]}{\lambda_1 + \lambda_2}} &\in B_p \Rightarrow [f] + [g] \in L^p(\mathcal{R}_1 \Sigma, \mu, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

⑤ Pro $[f] \in L^p(\mathcal{R}_1 \Sigma, \mu, \mathbb{R})$ položíme $\|f\|_p = \mathcal{U}_p([f])^{1/p}$
 Pak $(L^p(\mathcal{R}_1 \Sigma, \mu, \mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ je normovaný lineární prostor

Plýne to z větových I.4. $\|\cdot\|_p$ splňuje podmínky (a) a (b) z definice normy;

$$(i) \| [f] \|_p = 0 \Leftrightarrow \int |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow |f| = 0 \text{ p.s.v.} \Leftrightarrow [f] = 0$$

$$(ii) \|\lambda [f]\|_p = |\lambda| \cdot \| [f] \|_p \quad \lambda = 0 \text{ jasně} \\ \lambda \neq 0 \text{ z } \textcircled{3}$$

Dále $\{ [f] ; \| [f] \|_p \leq 1 \} = B_p$ je tedy zobrazení.
 z větových I.4 tedy plyne, že $\|\cdot\|_p$ je norma]

$$\textcircled{6} \quad p = \infty : \| [f] \|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f| = \inf \{ c > 0 ; \mu \{ \omega ; |f(\omega)| > c \} = 0 \} \in [0, \infty]$$

(zde $\inf \emptyset = \infty$)

$$L^\infty(\mathcal{R}_1 \Sigma, \mu, \mathbb{R}) = \{ [f] \in L^0(\mathcal{R}_1 \Sigma, \mu, \mathbb{R}) ; \| [f] \|_\infty < \infty \}$$

je NLP s normou $\|\cdot\|_\infty$

$$\Gamma. \| [f] \|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ p.s.v.} \Leftrightarrow [f] = 0$$

$$\cdot \| \lambda [f] \|_\infty = |\lambda| \cdot \| [f] \|_\infty, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, [f] \in L^\infty(\mathcal{R}_1 \Sigma, \mu, \mathbb{R})$$

$$\text{ } \quad \quad \quad \mathbb{R} \quad \{ \omega ; |\lambda f(\omega)| > c \} = \{ \omega ; |f(\omega)| > \frac{c}{|\lambda|} \}$$

$$\cdot \| [f] + [g] \|_\infty \leq \| [f] \|_\infty + \| [g] \|_\infty$$

Pro $\| [f] \|_\infty = \infty$ nebo $\| [g] \|_\infty = \infty$... zřejmě -

Nechť $\| [f] \|_\infty < \infty, \| [g] \|_\infty < \infty$

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow |f| \leq \| [f] \|_\infty + \varepsilon \text{ s.v.}, |g| \leq \| [g] \|_\infty + \varepsilon \text{ s.v.}$$

$$\Rightarrow |f+g| \leq |f| + |g| \leq \| [f] \|_\infty + \| [g] \|_\infty + 2\varepsilon \text{ s.v.}$$

$$\Rightarrow \| [f] + [g] \|_\infty \leq \| [f] \|_\infty + \| [g] \|_\infty + 2\varepsilon$$

$$\varepsilon \text{ libovolné} \Rightarrow \| [f] + [g] \|_\infty \leq \| [f] \|_\infty + \| [g] \|_\infty$$

Hölderova nerovnost a Youngova nerovnost

Nechť $p, q \in (1, +\infty)$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

☐ Youngova nerovnost: Nechť $a, b \geq 0$

$$\text{Pak } ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

a rovnost nastává, právě když $a^p = b^q$

Dk: Nechť $b > 0$ je pevné. Uvažme funkci

$$\varphi(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab, \quad a \in [0, +\infty)$$

Pak platí:

- φ je spojitá na $[0, +\infty)$

- $\varphi(0) = \frac{b^q}{q} > 0$

- $\varphi'(a) = a^{p-1} - b$

Proveďme φ :

$a :$	0	$b^{\frac{1}{p-1}}$	$+\infty$
$\varphi :$	$\frac{b^q}{q}$	0	
$\varphi' :$	—	0	+

↘ ↗

$$\varphi\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{1}{p} \cdot b^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q} b^q - b^{1+\frac{1}{p-1}}$$

(blue circle around $\frac{p}{p-1}$ with $=q$ above it)

$$= b^q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \right) = 0$$

(blue $=q$ above b^q)

Tedy $\varphi \geq 0$ na $[\bar{0}, +\infty)$ --- to dáme nerovnost

$$\varphi(a) > 0 \Leftrightarrow a = \delta^{\frac{1}{p-1}} \Leftrightarrow a^p = \delta^q$$

--- to dáme podmínku rovnosti.

[2] Máme prostor s měrou (Ω, Σ, μ) , fig dvě měřitelné funkce.

$$\text{Pak} \quad \int_{\Omega} |f \cdot g| d\mu \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |g|^q d\mu \right)^{1/q}$$

Jsou-li oba výrazy upravo konečné, pak rovnost nastává, právě když $\exists c \geq 0 : |f|^p = c \cdot |g|^q$ μ -s.v.
nebo $|g|^q = c |f|^p$ μ -s.v.

Důk: $f=0$ μ -s.v. nebo $g=0$ μ -s.v.
 $\Rightarrow$ platí rovnost (obě strany jsou 0)

Předpokládáme že f ani g nejsou s.v. nulové

$$\text{Pak} \quad \alpha := \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} > 0$$

$$\beta := \left(\int_{\Omega} |g|^q d\mu \right)^{1/q} > 0$$

Pokud $\alpha = +\infty$
nebo $\beta = +\infty$, nerovnost
platí. Necht' $\alpha, \beta \in (0, \infty)$

$$\text{Pak} \quad \int_{\Omega} |f g| d\mu = \alpha \cdot \beta \int_{\Omega} \frac{|f|}{\alpha} \cdot \frac{|g|}{\beta} d\mu$$

$$\stackrel{[1]}{\leq} \alpha \beta \cdot \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\alpha^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\beta^q} \right) d\mu$$

$$= d\beta \cdot \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{d^p} \int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu \overset{=d^p}{+} \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\beta^q} \int_{\mathbb{R}} |g|^q d\mu \overset{=\beta^q} \right)$$

$$= d\beta \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = 2\beta.$$

To dokazuj nerovnost.

Rovnost platí $\Leftrightarrow \frac{|f|^p}{d^p} = \frac{|g|^q}{\beta^q}$ (u.s.v.)

Proč? $d, \beta \in (0, +\infty)$ znamená to $|f|^p = \frac{d^p}{\beta^q} \cdot |g|^q$

a to je ono.

f, g jsou měřitelné

13) Pak $\sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu} < \infty$ a $\int_{\mathbb{R}} |g|^q d\mu < \infty$,

pak $f \cdot g$ je integrovatelná a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} fg d\mu \right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^q d\mu \right)^{1/q}$$

Důk: fg měřitelná a z 12) plyne

$$\int_{\mathbb{R}} |fg| d\mu \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^q d\mu \right)^{1/q}$$

tedy fg je integrovatelná a $\left| \int_{\mathbb{R}} fg d\mu \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |fg| d\mu$

4 Necht f je měřitelná a $\int_{\Sigma} |f|^p d\mu < +\infty$

$$\text{pak } \left(\int_{\Sigma} |f|^p d\mu \right)^{1/p} = \sup \left\{ \left| \int_{\Sigma} f g d\mu \right| ; \int_{\Sigma} |g|^q d\mu = 1 \right\}$$

Dk: " $\geq$ " plyne z [3]

" $\leq$ " plyne z toho, že se může rovnost

$$\text{pro } g = \frac{f \cdot |f|^{p-2}}{\left(\int_{\Sigma} |f|^p d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}}}$$

(tím, kdy je $f=0$, je i $g=0$.)

5 Skrmek: $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

pak pro $[f] \in L^p(\Sigma, \mu; \mathbb{R})$ platí

$$\| [f] \|_p = \max \left\{ \left| \int_{\Sigma} f g d\mu \right| ; [g] \in L^q(\Sigma, \mu; \mathbb{R}), \| [g] \|_q = 1 \right\}$$