

Nechť $p \in [1, \infty)$. Pak prostor $X = L^p(\mu)$ je úplný
(μ je libovolný σ -aditivní míra)

Když známe větě Tuzar I.29, podle něj stačí
důkázat, že řada absolutně konvergentní řada v X
konverguje:

[1] Nechť (f_n) je posloupnost v $L^p(\mu)$
a platí $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty$. Ukážeme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$
konverguje v prostoru $L^p(\mu)$

Břípava: Označme $C := \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p$.

Dále nechť $g_n := |f_n|$. Pak $g_n \geq 0$, $g_n \in L^p(\mu)$
a $\|g_n\|_p = \|f_n\|_p$

Dále položíme $g(u) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(u)$ pro každé u
Pak g je (nezáporní) měřitelná funkce
shodně téměř v $[0, +\infty]$

[2] Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\|g_1 + \dots + g_n\|_p \leq \|g_1\|_p + \dots + \|g_n\|_p \leq \|f_1\|_p + \dots + \|f_n\|_p \leq C$$

$$\text{Teď } \int (g_1 + \dots + g_n)^p d\mu \leq C$$

protože $0 \leq (g_1 + \dots + g_n)^p \nearrow g^p$, z LeViche věty

$$\text{plyne } \int g^p d\mu \leq C$$

Speciálně g je μ -s.v. konečná a $g \in L^p(\mu)$

[3] Pripomeníme, že $g_n = |f_n|$. Z [2] log plyne,
že pro μ -s.v. ω platí $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\omega)| < \infty$, tedy
řadu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$ konverguje $n=1$ absolutně, tedy konverguje

Definujeme $f(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$. To je tedy shodně
definovaná shodně značnou měřitelnou funkcí.

Žijící ukazují, že $f \in L^p(\mu)$ a $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in L^p(\mu)$.

[4] Pro $n, m \in \mathbb{N}$ označme

$$F_{n,m} := f_{n+1} + \dots + f_{n+m}$$

$$F_n := \sum_{k=1}^{\infty} f_{n+k} \quad (\text{ne smyslu bodové konvergence} \\ \mu\text{-s.v.})$$

Z [3] víme, že F_n je s.v. definovaná a s.v. značnou
a $F_{n,m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} F_n$ s.v.

$$\text{Namoc} \quad |F_{n,m}| \leq |f_{n+1}| + \dots + |f_{n+m}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} g_{n+k} \leq g \\ (\mu\text{-s.v.})$$

$$\text{Tedy} \quad |F_{n,m}|^p \leq g^p \quad (\mu\text{-s.v.})$$

Protože $g \in L^p(\mu)$ dle [2], je $g^p \in L^1(\mu)$,
a tedy z Lebesgueovy věty je

$$(*) \quad \int |F_n|^p = \lim_{m \rightarrow \infty} \int |F_{n,m}|^p \leq \int g^p,$$

tedy $F_n \in L^p(\mu)$ pro každé n , od čehož spočítáme $f \in L^p(\mu)$

5) Nakonec uvažujeme, že $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in L^p(\mu)$:

$f = \sum_{k=1}^n f_k = F_n$, tedy díky normě, že $F_n \rightarrow 0$ v $L^p(\mu)$

z (*) vidíme, že $\|F_n\|_p = \lim_{m \rightarrow \infty} \|F_{n,m}\|_p$

$$\text{Přitom } \|F_{n,m}\|_p = \|f_{n+1} + \dots + f_{n+m}\|_p$$

$$\leq \|f_{n+1}\|_p + \dots + \|f_{n+m}\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n+k}\|_p$$

$$\text{Tož } \|F_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n+k}\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ protože}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < +\infty.$$

Titěm je důkaz ukončen.