

Poznamky k Věte II.17:

Tato věta říká myslí, že:

$$\begin{aligned} C_0(\Gamma)^* &\approx \ell^1(\Gamma) \\ \ell^1(\Gamma)^* &\approx \ell^\infty(\Gamma) \\ \ell^p(\Gamma)^* &\approx \ell^q(\Gamma), \text{ pokud } p \in (1, \infty) \\ &\text{a } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

Tato věta nedává popis $\ell^\infty(\Gamma)^*$.

Všem je rozdíly:

Ve druhé části důkazu se postupně zhruba takto:

Mějme $\varphi \in \begin{cases} C_0(\Gamma)^* \\ \ell^1(\Gamma)^* \\ \ell^p(\Gamma)^* \end{cases}$ (kde $p \in (1, \infty)$)

Pro $\gamma \in \Gamma$ označme
 $g(\gamma) := \varphi(e_\gamma)$
(e_γ je kanonický vektor, máš-li
 γ má 1, jinak 0)

Pak $g \in \begin{cases} \ell^1(\Gamma) \\ \ell^\infty(\Gamma) \\ \ell^q(\Gamma) \end{cases}$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Pak pro $F \subset \Gamma$ konečná a součtem volba čísel $c_\gamma, \gamma \in F$
platí
$$\varphi\left(\sum_{\gamma \in F} c_\gamma e_\gamma\right) \stackrel{\text{příměrně}}{=} \sum_{\gamma \in F} c_\gamma \varphi(e_\gamma) = \sum_{\gamma \in F} c_\gamma g(\gamma)$$

Toto lze interpretovat takto:

$\varphi(f) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) g(\gamma)$, pokud $\{\gamma \in \Gamma; f(\gamma) \neq 0\}$ je konečný

Neboli, při ztácení z té věty: $\varphi = \sum g$ na $\{f; \{\gamma \in \Gamma, f(\gamma) \neq 0\} \text{ konečný}\}$

Přitom tato množina je hustá v $\begin{cases} C_0(\Gamma) \\ \ell^1(\Gamma) \\ \ell^p(\Gamma) \end{cases}$.

Prípad $C_0(\Gamma)$: $f \in C_0(\Gamma)$, $\varepsilon > 0$

Z definície $C_0(\Gamma)$ plynie, že $F := \{x \in \Gamma; |f(x)| > \varepsilon\}$ je konečná.

Definujeme $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in F \\ 0 & , x \in \Gamma \setminus F \end{cases}$

Patrí $\{x; \tilde{f}(x) \neq 0\} = F$ je konečná.

a $\|f - \tilde{f}\|_\infty \leq \varepsilon$ $\Gamma \quad |f(x) - \tilde{f}(x)| = \begin{cases} 0 & , x \in F \\ |f(x)| \leq \varepsilon & , x \notin F \end{cases}$ $\square$

Prípad $\ell^p(\Gamma)$, $p \in [1, \infty)$:

$f \in \ell^p(\Gamma)$, $\varepsilon > 0$

Patrí $\|f\|_p^p = \sum_{x \in \Gamma} |f(x)|^p < \infty$

$\Rightarrow \exists F \subset \Gamma$ konečná $\sum_{x \in F} |f(x)|^p > \|f\|_p^p - \varepsilon$

Definujeme $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in F \\ 0 & , x \in \Gamma \setminus F \end{cases}$

Patrí opäť $\{x \in \Gamma; \tilde{f}(x) \neq 0\} \subset F$, teda je to konečná množina.

A: $\|f - \tilde{f}\|_p^p = \sum_{x \in \Gamma} |f(x) - \tilde{f}(x)|^p = \sum_{x \in \Gamma \setminus F} |f(x)|^p$

$= \|f\|_p^p - \sum_{x \in F} |f(x)|^p < \varepsilon$

Teda: $\|f - \tilde{f}\|_p < \varepsilon^{1/p}$ $\square$

Proč je $\varphi = \Phi g$ na husté množině, je $\varphi = \Phi g$

Jed je to s $\ell^\infty(\Gamma)^*$: Pokud Γ je konečný, pak $\ell^\infty(\Gamma) = C_0(\Gamma) = (\mathbb{R}^{|\Gamma|}, \|\cdot\|_\infty)$
a tedy $(\ell^\infty(\Gamma))^* \cong \ell^1(\Gamma) = (\mathbb{R}^{|\Gamma|}, \|\cdot\|_1)$

Ale když Γ je nekonečný, pak to nefunguje:

Zkusme prozívat ten důkaz:

$\varphi \in (\ell^\infty(\Gamma))^*$ definujeme $g(x) = \varphi(x)$ pro $x \in \Gamma$.

Pak lze ukázat, že $g \in \ell^1(\Gamma)$ (analogicky pro vektorové případy)

a že $\varphi = \sum g$ na $\{f \in \ell^\infty(\Gamma); \{x \in \Gamma; f(x) \neq 0\} \text{ je konečný}\}$

ALE tato množina NEVÍ HUSTA v $\ell^\infty(\Gamma)$

Γ vezme $f \equiv 1$ na Γ . Pak $f \in \ell^\infty(\Gamma)$

a pokud $\{x \in \Gamma; f(x) \neq 0\}$ je konečný, pak $\|f - f\|_\infty \geq 1$

Proto NEDOSTANEME $\varphi = \sum g$

Le můžeme ukázat, že uzavřený obal je $C_0(\Gamma)$.

Dostaneme tedy, že $\varphi = \sum g$ na $C_0(\Gamma)$, ale ne na $\ell^\infty(\Gamma)$.

že rovnost opravdu nemůžeme plně z H-H věty:

$C_0(\Gamma) \subset \ell^\infty(\Gamma)$ je uzavřený podprostor,

$f \equiv 1 \in \ell^\infty(\Gamma) \setminus C_0(\Gamma)$.

Dle věty II.9 existuje $\varphi \in (\ell^\infty(\Gamma))^*$, $\varphi|_{C_0(\Gamma)} \equiv 0$, $\varphi(f) = 1$

Pak φ nelze vyjádřit v tvaru $\sum g$ [na tom by muselo být $g \equiv 0$, to ale nefunguje]