

Poznámky z Věty II. 19.

Tato věta říká, že

- $L^1(\mu)^* \approx L^\infty(\mu)$, pokud μ je σ -konečná
- $L^p(\mu)^* \approx L^q(\mu)$, pokud $p \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a μ je libovolná.

Tato věta neříká nic o $L^1(\mu)^*$, pokud μ není σ -konečná
a vůbec nic o $L^\infty(\mu)^*$

Vlastnost $L^1(\mu)^*$ pro μ ne- σ -konečnou se někdy přibližuje zkusit
ke Kapitole II (viz příklady pro porozumění látce).

O dualu z $L^\infty(\mu)$:

- Kroky 1 a 2 z důkazu Věty II. 19 my: dávají:

že-li $g \in L^1(\mu)$, pak $\Phi_g(f) = \int fg d\mu$, $f \in L^\infty(\mu)$
splňuje $\Phi_g \in L^\infty(\mu)^*$ a $\|\Phi_g\| = \|g\|_1$

- Ani pro μ konečnou ale nemusí platit, že každý prvok $L^\infty(\mu)^*$ je tvar Φ_g
Krok 4 důkazu v tomto případě nefunguje.

Vezmeme-li totiž $\varphi \in L^\infty(\mu)^*$ a definujeme $\nu(A) = \varphi(\chi_A)$, tzn. čísel,
pak ν NEMUSÍ BÝT σ -aditivní míra

Příklad: Uvažme interval $[0, 1]$ s Lebesgueovou mírou λ

Nechtě $Y = \text{span} \left\{ \chi_{\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]}, n \in \mathbb{N} \right\} \subset L^\infty(\lambda)$

Uvažme funkci $h \equiv 1$ na $[0, 1]$. Pak $h \in L^\infty(\lambda) \setminus \overline{Y}$

$f \in Y \Rightarrow f$ je (konečná) lineární kombinace funkcí $\chi_{\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]}$, $n \in \mathbb{N}$

Proto $\exists n \in \mathbb{N}$, že $f = 0$ na $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$. Odtud $\|h - f\|_\infty \geq 1$,

protože $h - f = 1$ na $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ a interval má kladnou míru

Tedy z Věty II. 9 plyne, že existuje $\varphi \in L^\infty(\lambda)^*$ splňující

$\varphi|_Y = 0$ a $\varphi(h) = 1$

Odtud plyne, že ν definovaná výše není σ -aditivní.

$$[0, 1] = \bigcup_n \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right], \text{ ale } \nu([0, 1]) = 1 \neq 0 = \sum_n \nu\left(\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right)$$

To zároveň naznačuje, že φ nemôže byť

$$\left[\text{pre každé } g \text{ totožné s } \nu(A) = \int_A g d\lambda, \text{ čo je } \sigma\text{-aditívne} \right]$$

• Reprezentácia dualu z $L^\infty(\mu)$:

Prvky $L^\infty(\mu)$ lze reprezentovať jako „konечно адитивные абсолютные значения на μ “.

Podrobnejšie: Pojme $L^\infty(\Sigma, \mu)$. Každý dual k tomuto priestoru

$$\text{je izomorfny } M_{\text{f.a.}}(\Sigma, \mu) = \{ \nu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}; \nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B),$$

$$\text{pre } A, B \in \Sigma, A \cap B = \emptyset;$$

$$\forall A \in \Sigma: \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0;$$

$$\underbrace{\nu \text{ má konečnú variáciu}} \}$$

$$\| \nu \| = \sup_{\{A_j\}} \sum_{j=1}^n |\nu(A_j)|; \quad n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \Sigma \text{ disjunktné}$$

$$\underline{\text{Nízka definícia}} \cdot \varphi \in L^\infty(\mu)^* \dots \nu(A) = \varphi(\chi_A)$$

$$\cdot \nu \in M_{\text{f.a.}} \dots \varphi\left(\sum_1^n c_j \chi_{A_j}\right) = \sum_1^n c_j \nu(A_j)$$

— tak je φ definované po jednoducho-funkciách.

Ty isté funkcie, jednoznačne rozšírite na $L^\infty(\mu)$

• Vztah z $L^1(\mu)$:

$$\varphi \in L^\infty(\mu)^* \text{ je tvar } \int g \Leftrightarrow \text{příslušná } \nu \text{ je } \sigma\text{-aditivní}$$

Pokud existuje posloupnost $(A_n) \subset \Sigma$, kde $\mu(A_n) > 0$ a A_n jsou podmnožiny,

pak existuje takové φ , že příslušná ν není σ -aditivní

(analogicky jako v příkladech výše)