

Lemma 24 Necht X je NCP, $Y \subset X$, (y_n) posloupnost v Y a $y \in Y$.
 Pak: $y_n \xrightarrow{w} y \text{ v } Y \Rightarrow y_n \xrightarrow{w} y \text{ v } X$

Důkaz $\Rightarrow$: Necht $y_n \xrightarrow{w} y \text{ v } Y$. Ukažeme, že $y_n \xrightarrow{w} y \text{ v } X$.
 Vezme $f \in X^*$ lisovalne. Pak $f|_Y \in Y^*$.
 Tedy $f|_Y(y_n) \rightarrow f|_Y(y)$. Ale to znamená, že $f(y_n) \rightarrow f(y)$.
 Protože $f \in X^*$ bylo lisovalne, dostáváme $y_n \xrightarrow{w} y \text{ v } X$.

$\Leftarrow$: Necht $y_n \xrightarrow{w} y \text{ v } X$. Ukažeme, že $y_n \xrightarrow{w} y \text{ v } Y$.
 Vezme lisovalne $f \in Y^*$. Z H-B věty plyne,
 že existuje $g \in X^*$ splňující $g|_Y = f$.
 Pak $g(y_n) \rightarrow g(y)$. Protože $g|_Y = f$ a $y_n, y \in Y$,
 dostaneme $f(y_n) \rightarrow f(y)$. Protože $f \in Y^*$ bylo lisovalne,
 platí $y_n \xrightarrow{w} y \text{ v } Y$.

Lemma 25 Necht X je NCP
 (a) Je-li (x_n) posloupnost v X a $x_n \xrightarrow{w} x$, pak
 $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.
 (b) Je-li (f_n) posloupnost v X^* a $f_n \xrightarrow{w^*} f$, pak
 $\|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$.

Důkaz: (a) Necht $x_n \xrightarrow{w} x$. Podle dualního vyjádření normy
 existuje $f \in X^*$ splňující $\|f\| \leq 1$ a $f(x) = \|x\|$

$$\text{Pak } \|x\| = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)| =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$$

$\leq \|x_n\|$ podle věty

↑ rovná se to $\|x\| \geq 0$

(b) Necht $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

Zvolme $x \in B_X$ libovolne. Pak $f_n(x) \rightarrow f(x)$, a tedy

$$|f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| \leq \|f\| \text{ pro každé } n.$$

$$\text{Tedy: } \forall x \in B_X: |f(x)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$$

$$\text{Pro to } \|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$$

$\|f\| = \sup_{x \in B_X} |f(x)|$

Lemma 26 (Mazurova věta): Necht X je NLP, $x_n \xrightarrow{w} x$ v X . Pak:

(i) $x \in \overline{\text{conv}\{x_n, n \in \mathbb{N}\}}$

(ii) $\exists (y_n): y_n \in \text{conv}\{x_k, k \geq n\}, y_n \rightarrow x$ (slabo)

Důkaz: (i) Necht $A := \overline{\text{conv}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}}$ (= konvexní obal množiny členů posloupnosti (x_n))

Dokážeme $x \in A$, a to správně, necht $x \notin A$.

Pak A je uzavřená konvexní množina, $\{x\}$ je kompaktní konvexní množina a tyto dvě množiny jsou disjunktní.

Tedy podle oddělovací H-B věty (věta 11)

existuje $f \in X^*$ a $c, d \in \mathbb{R}$, že

$$\forall y \in A: \text{Re } f(x) \leq c < d \leq \text{Re } f(y).$$

Protože $x_n \in A$ pro každé n , je $\forall n \in \mathbb{N} \text{Re } f(x_n) \geq d$.

Protože $x_n \xrightarrow{w} x$, je $f(x_n) \rightarrow f(x)$, tedy $\text{Re } f(x_n) \rightarrow \text{Re } f(x)$. Pro to

$$\boxed{\text{Re } f(x) \geq d}, \text{ což je spor.}$$

(ii) $A_n := \overline{\text{conv}\{x_k, k \geq n\}}$. Protože posloupnost $(x_k)_{k \geq n}$ slabě konverguje k x ,

z bodu (i) plyne $x \in \overline{A_n}$. Můžeme tedy najít $y_n \in A_n$ splňující $\|y_n - x\| < \frac{1}{n}$.

Pak $y_n \rightarrow x$.