

II.4 Slabá a slabá* konvergence

Definice. Nechť X je normovaný lineární prostor.

- Řekneme, že posloupnost (x_n) prvků X **slabě konverguje** k prvku $x \in X$, pokud

$$\forall f \in X^*: f(x_n) \rightarrow f(x).$$

Tuto skutečnost zapisujeme $x_n \xrightarrow{w} x$ nebo též $x_n \rightharpoonup x$. Bod x pak nazýváme **slabou limitou** posloupnosti (x_n) .

- Řekneme, že posloupnost (f_n) prvků X^* **slabě* konverguje** k prvku $f \in X^*$, pokud

$$\forall x \in X: f_n(x) \rightarrow f(x).$$

Tuto skutečnost zapisujeme $f_n \xrightarrow{w^*} f$ nebo též $f_n \rightharpoonup^* f$. Prvek f pak nazýváme **slabou* limitou** posloupnosti (f_n) .

Poznámky:

- (1) Nechť X je normovaný lineární prostor. Každá posloupnost v X má nejvýše jednu slabou limitu. Každá posloupnost v X^* má nejvýše jednu slabou* limitu.
- (2) Běžnou konvergenci v normovaném lineárním prostoru, tj. konvergenci v metrice generované normou, někdy nazýváme **normovou konvergencí**, **konvergencí v normě** nebo též **silnou konvergencí**.
- (3) Nechť X je normovaný lineární prostor, (x_n) posloupnost prvků X a $x \in X$. Pak platí

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow x_n \xrightarrow{w} x.$$

Opačná implikace obecně neplatí. Například posloupnost (e^n) kanonických jednotkových vektorů v prostoru ℓ^p pro $p \in (1, \infty)$ slabě konverguje k nule, ale nekonverguje k nule silně.

- (4) Nechť X je normovaný lineární prostor, (f_n) posloupnost prvků X^* a $f \in X^*$. Pak platí

$$f_n \rightarrow f \Rightarrow f_n \xrightarrow{w} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{w^*} f.$$

Opačné implikace obecně neplatí:

- Nechť $X = \ell^p$, kde $p \in (1, \infty)$. Nechť (f_n) je posloupnost souřadnicových funkcionálů. Pak $f_n \xrightarrow{w} 0$ v $X^* = \ell^q$ (kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), ale posloupnost (f_n) nekonverguje silně.
 - Nechť $X = c_0$. Nechť (f_n) je posloupnost souřadnicových funkcionálů. Pak $f_n \xrightarrow{w^*} 0$, ale posloupnost (f_n) nekonverguje slabě v $X^* = \ell^1$.
- (5) Je-li X normovaný lineární prostor konečné dimenze, pak pro posloupnost (x_n) v X platí

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{w} x.$$

Existují i některé prostory nekonečné dimenze, v nichž tato ekvivalence platí, například ℓ^1 (což dokázal I. Schur v roce 1921).

- (6) Je-li X reflexivní Banachův prostor, pak pro posloupnost (f_n) v X^* platí

$$f_n \xrightarrow{w^*} f \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{w} f.$$

Existují i některé nereflexivní prostory, v nichž tato ekvivalence platí, například ℓ^∞ (jak dokázal A. Grothendieck v roce 1953).

- (7) Je-li X Banachův prostor nekonečné dimenze, pak existuje posloupnost (f_n) v X^* taková, že $\|f_n\| = 1$ pro každé n a přitom $f_n \xrightarrow{w^*} 0$. Tuto netriviální větu dokázali nezávisle B. Josefson a A. Nissenzweig v roce 1975.

Tvrzení 24. Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y \subset X$ jeho podprostor. Nechť (y_n) je posloupnost v Y a $y \in Y$. Pak

$$y_n \xrightarrow{w} y \text{ v prostoru } Y \Leftrightarrow y_n \xrightarrow{w} y \text{ v prostoru } X.$$

Tvrzení 25. Nechť X je normovaný lineární prostor.

- (a) Pokud $x_n \xrightarrow{w} x$ v X , pak $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.
- (b) Pokud $f_n \xrightarrow{w^*} f$ v X^* , pak $\|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$.

Tvrzení 26 (Mazurova věta). Nechť X je normovaný lineární prostor. Pokud $x_n \xrightarrow{w} x$ v X , pak existuje posloupnost (y_n) konvexních kombinací bodů $x_n, n \in \mathbb{N}$, která (silně) konverguje k x .

Tvrzení 27 (princip stejnoměrné omezenosti). Necht' X a Y jsou normované lineární prostory a $A \subset L(X, Y)$ je nějaká podmnožina. Pokud je množina

$$\{x \in X; \{Tx; T \in A\} \text{ je omezená v } Y\}$$

druhé kategorie v prostoru X , pak je množina A omezená v $L(X, Y)$.

Důsledek 28. Necht' X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $A \subset L(X, Y)$. Pak následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:

- (i) Množina A je omezená v $L(X, Y)$.
- (ii) Pro každé $x \in X$ je množina $\{Tx; T \in A\}$ omezená v Y .

Důsledek 29 (omezenost a slabá omezenost). Necht' X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$. Pak následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:

- (i) Množina A je omezená v X .
- (ii) Každé $f \in X^*$ je omezené na množině A .

Důsledek 30.

- (a) Necht' X je normovaný lineární prostor. Pak každá slabě konvergentní posloupnost v X je omezená.
- (b) Necht' X je Banachův prostor. Pak každá slabě* konvergentní posloupnost v X^* je omezená.

Tvrzení 31. Necht' X a Y jsou Banachovy prostory a (T_n) je posloupnost v $L(X, Y)$. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:

- (1) Existuje takové $T \in L(X, Y)$, že $T_n(x) \rightarrow T(x)$ pro každé $x \in X$.
- (2) Posloupnost (T_n) je omezená v $L(X, Y)$ a existuje hustá podmnožina $D \subset X$, že pro každé $x \in D$ je posloupnost $(T_n(x))$ konvergentní v Y .

Příklady 32.

- (1) Necht' $X = c_0$ nebo $X = \ell^p$, kde $p \in (1, +\infty)$. Posloupnost (x^n) slabě konverguje k x v X , právě když je omezená v X a konverguje k x po souřadnicích, tj.

$$\forall k \in \mathbb{N}: x_k^n \rightarrow x_k.$$

- (2) Necht' $X = c_0$ nebo $X = \ell^1$. Ztotožňme X^* s ℓ^1 nebo ℓ^∞ podle Věty 17. Pak posloupnost (f_n) slabě* konverguje k f v X^* , právě když je omezená v X a konverguje k f po souřadnicích.

Věta 33. Necht' X je separabilní Banachův prostor. Pak pro každou omezenou posloupnost v X^* existuje její slabě* konvergentní podposloupnost.

Věta 34. Necht' X je reflexivní Banachův prostor. Pak pro každou omezenou posloupnost v X existuje její slabě konvergentní podposloupnost.

Poznámky:

- (1) Věta 33 pro neseparabilní Banachovy prostory obecně neplatí (například pro $X = \ell^1(\mathbb{R})$). Pro některé „pěkné“ neseparabilní prostory však platí (například pro $X = c_0(\Gamma)$).
- (2) Věta 34 platí stejně pro separabilní i neseparabilní prostor X . Důvod je ten, že se díky Větě 13(b) a Tvrzení 24 můžeme omezit na separabilní případ.
- (3) Ve Větě 34 platí i obrácená implikace, tedy reflexivní prostory jsou charakterizovány tím, že každá omezená posloupnost má slabě konvergentní podposloupnost. To je důsledkem netriviální Eberlein-Šmuljanovy věty (ze čtyřicátých let dvacátého století).

Věta 35. Necht' X je reflexivní Banachův prostor a $C \subset X$ je neprázdná uzavřená konvexní množina. Pak pro každé $x \in X$ existuje (alespoň jeden) bod $y \in C$ nejbližší k x , tj. takový, že $\|x - y\| = \text{dist}(x, C)$.