(1) Kvocient vektorového prostoru:

X vektorový prostor, $Z \subset\subset X$

definujme $x \sim y \stackrel{df}{\equiv} x - y \in Z$

Pak $\sim$ je ekvivalence na X (tj. $\forall x \in X: x \sim x$; $\forall x, y \in X: x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$

$\forall x, y, z \in X: x \sim y \;\&\; y \sim z \Rightarrow x \sim z$)

Pro $x \in X$ nechť $[x]$ je příslušná třída ekvivalence, tj.

$[x] = \{y \in X;\ y - x \in Z\} = \{x + z,\ z \in Z\}$ $(= x + Z)$

$X/Z = \{[x],\ x \in X\}$

na X/Z definujeme operace: $[x] + [y] = [x+y]$, $\lambda \cdot [x] = [\lambda x]$ $\Big\}$ $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{F}$

Pak X/Z s těmito operacemi je vektorový prostor

$\ulcorner$ • operace jsou dobře definované:

$[x_1] = [x_2] \;\&\; [y_1] = [y_2] \Rightarrow [x_1 + y_1] = [x_2 + y_2]$

$\ulcorner$ $[x_1] = [x_2] \Rightarrow x_2 - x_1 \in Z$, $[y_1] = [y_2] \Rightarrow y_2 - y_1 \in Z$ $\Big\} \Rightarrow \underbrace{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)}_{= (x_2 + y_2) - (x_1 + y_1)} \in Z$ $\Rightarrow [x_1 + y_1] = [x_2 + y_2]$ $\checkmark$

$[x_1] = [x_2]$, $\lambda \in \mathbb{F} \Rightarrow [\lambda x_1] = [\lambda x_2]$

$\ulcorner$ $[x_1] = [x_2] \Rightarrow x_2 - x_1 \in Z \Rightarrow \underbrace{\lambda \cdot (x_2 - x_1)}_{= \lambda \cdot x_2 - \lambda \cdot x_1} \in Z \Rightarrow [\lambda x_1] = [\lambda x_2]$ $\lrcorner$

• je to vektorový prostor: ověří se axiomy. Například

$[x] + [y] = [x+y] = [y+x] = [y] + [x]$ .... komutativita +

asociativita podobně

nulový vektor je $[0]$ $(= Z)$ atd. $\lrcorner$

② Nechť navíc X je NLP a Z je uzavřený.

Pro $x \in X$ označme $\|[x]\|_{X/Z} := \inf\{\|y\|;\ y \in [x]\}$

Pak • $\|\cdot\|_{X/Z}$ je dobře definováno [to je zřejmé]

• $\|[x]_{X/Z}\| = \operatorname{dist}(0, [x]) = \operatorname{dist}(x, Z)$

$\operatorname{dist}(0,[x]) = \inf\{\|0-y\|;\ y \in [x]\} = \|[x]\|_{X/Z}$

$\operatorname{dist}(x, Z) = \inf\{\|x-z\|;\ z \in Z\} = \inf\{\|y\|;\ y \in [x]\} = \|[x]\|_{X/Z}$

$z \in Z \Rightarrow x - z \in [x]$, odtud „$\geq$"

$y \in [x] \Rightarrow y = x - \underbrace{(x-y)}_{\in Z}$, odtud „$\leq$"

• $\|\cdot\|_{X/Z}$ je norma na X/Z

• $\|[x]\|_{X/Z} \geq 0$ ... jasné

• $\|[x]\|_{X/Z} = 0 \Rightarrow \operatorname{dist}(x, Z) = 0 \overset{Z \text{ uzavřený}}{\Rightarrow} x \in Z \Rightarrow [x] = [0]$

• $\|\lambda [x]\|_{X/Z} = \|[\lambda x]\|_{X/Z} = \inf\{\|y\|;\ y \in [\lambda x]\}$

$$= \begin{cases} \inf\{\|y\|,\ y \in [0]\} = 0 & \lambda = 0 \\ \inf\{\|\lambda u\|;\ u \in [x]\} = \inf\{|\lambda| \cdot \|u\|,\ u \in [x]\} & \lambda \neq 0 \end{cases}$$

$y \in [\lambda x] \Leftrightarrow \exists u \in [x] : y = \lambda u$

$= |\lambda| \cdot \inf\{\|u\|,\ u \in [x]\} = |\lambda| \cdot \|[x]\|_{X/Z}$

• $\|[x] + [y]\| \leq \|[x]\| + \|[y]\|$:

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\ u \in [x],\ \|u\| < \|[x]\| + \varepsilon$

$\exists\ v \in [y],\ \|v\| < \|[y]\| + \varepsilon$

Pak $u + v \in [x+y]$, a tedy

$\|[x] + [y]\| = \|[x+y]\| \leq \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$< \|[x]\| + \|[y]\| + 2\varepsilon$

ε libovolné $\Rightarrow$ hotovo

③ Je-li X úplný (a Z uzavřený), pak X/Z je také úplný.

[Použijeme Tvrzení I.29:

Nechť $([x_n]) \subset X$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|[x_n]\|_{X/Z} < \infty$

Zvolme $y_n \in [x_n]$, aby $\|y_n\| < \|[x_n]\|_{X/Z} + \frac{1}{2^n}$

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\|[x_n]\|_{X/Z} + \frac{1}{2^n} \right) < \infty$

Tedy dle T I.29 řada $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konverguje v X. Označme $y := \sum_{n=1}^{\infty} y_n$

Tvrdím, že $[y] = \sum_{n=1}^{\infty} [x_n]$ v X/Z:

$$\Big\|[y] - \sum_{n=1}^{N} [x_n]\Big\|_{X/Z} \underset{\substack{\uparrow \\ y_n \in [x_n] \Rightarrow [x_n] = [y_n]}}{=} \Big\|[y] - \sum_{n=1}^{N} [y_n]\Big\| = \Big\|\Big[y - \sum_{n=1}^{N} y_n\Big]\Big\|_{X/Z} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{definice } \|\cdot\|_{X/Z} \\ y - \sum_{n=1}^{N} y_n \in [y - \sum_{n=1}^{N} y_n]}}{\leq} \Big\|y - \sum_{n=1}^{N} y_n\Big\| \xrightarrow{N \to \infty} 0$$

Tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} [x_n]$ konverguje v X/Z.

To dokončuje důkaz úplnosti X/Z podle T I.29]

④ X NLP, Z uzavřený ... $q: X \to X/Z$ definujeme předpisem $q(x) = [x]$, $x \in X$.

Pak q je lineární, $q(U_X) = U_{X/Z}$. Speciálně $\|q\| \leq 1$

[• q lineární ... z definice operací na X/Z

$$q(x+y) = [x+y] = [x] + [y] = q(x) + q(y)$$
$$q(\lambda x) = [\lambda x] = \lambda \cdot [x] = \lambda q(x)$$

• $x \in U_X \Rightarrow \|x\| < 1 \Rightarrow \|q(x)\|_{X/Z} = \|[x]\|_{X/Z} \leq \|x\| < 1 \Rightarrow q(x) \in U_{X/Z}$

• $[x] \in U_{X/Z} \Rightarrow \|[x]\|_{X/Z} < 1 \Rightarrow \exists\, y \in [x] : \|y\| < 1$ (tj. $y \in U_X$). Pak $q(y) = [y] = [x]$
$\Rightarrow [x] \in q(U_X)$]