

III. Omezené lineární operátory

III.1 Kvocienty a faktorizace omezených operátorů

Tvrzení 1 (kvocient normovaného lineárního prostoru). *Nechť X je normovaný lineární prostor a Z je jeho uzavřený podprostor. Definujme na X ekvivalenci $\sim$ vztahem $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Z$. Pro $x \in X$ označme symbolem $[x]$ třídu ekvivalence obsahující bod x , tj.*

$$[x] = \{y \in X; y - x \in Z\} = x + Z.$$

Dále položme

$$X/Z = \{[x]; x \in X\}$$

a definujme na X/Z operace

$$[x] + [y] = [x + y], \quad \lambda \cdot [x] = [\lambda x] \quad \text{pro } x, y \in X \text{ a } \lambda \in \mathbb{F}.$$

Dále pro $x \in X$ položme

$$\|[x]\|_{X/Z} = \inf\{\|y\|; y \in [x]\}.$$

Pak platí:

- (a) Operace na X/Z jsou dobře definovány a X/Z s těmito operacemi tvoří vektorový prostor.
- (b) Pro každé $x \in X$ platí $\|[x]\|_{X/Z} = \text{dist}(0, [x]) = \text{dist}(x, Z)$.
- (c) $\|\cdot\|_{X/Z}$ je norma na X/Z , $(X/Z, \|\cdot\|_{X/Z})$ je tedy normovaný lineární prostor.
- (d) Je-li X úplný, je i $(X/Z, \|\cdot\|_{X/Z})$ úplný.

Poznámka: Prostor $(X/Z, \|\cdot\|_{X/Z})$ se nazývá **kvocient X podle Z** nebo též **faktorprostor X podle Z** . Obvykle píšeme jen X/Z místo $(X/Z, \|\cdot\|_{X/Z})$. Zobrazení $q : x \mapsto [x]$ nazýváme **kanonické kvocientové zobrazení X na X/Z** .

Větička 2. *Nechť q je kanonické kvocientové zobrazení X na X/Z . Pak q je lineární a splňuje $q(U_X) = U_{X/Z}$. Speciálně, $\|q\| \leq 1$.*

Tvrzení 3 (faktorizace lineárního operátoru). *Nechť X a Y jsou normované lineární prostory a $T \in L(X, Y)$.*

- (a) *Nechť $Z \subset \ker T$ je uzavřený podprostor. Pak existuje právě jedno $\tilde{T} \in L(X/Z, Y)$ takové, že $T = \tilde{T}q$, kde q je kanonické kvocientové zobrazení X na X/Z . Zobrazení $\tilde{T}$ splňuje $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*
- (b) *Je-li $Z = \ker T$, je zobrazení $\tilde{T}$ z bodu (a) navíc prosté.*

Poznámka: Pokud je operátor $\tilde{T}$ z Tvzení 3(b) izometrie $X/\ker T$ na Y , pak se operátor T obvykle nazývá **kvocientový**. Z Větičky 2 pak plyne, že T je kvocientový, právě když $T(U_X) = U_Y$. Pokud platí $T(B_X) = B_Y$, platí i $T(U_X) = U_Y$, a tedy operátor T je kvocientový. Na druhou stranu, kvocientový operátor nemusí splňovat $T(B_X) = B_Y$.

Větička 4 (kvocient Hilbertova prostoru). *Nechť H je Hilbertův prostor a Z jeho uzavřený podprostor. Pak H/Z je rovněž Hilbertův prostor. Navíc, pokud q je kanonické kvocientové zobrazení, pak q zobrazuje ortogonální doplněk $Z^\perp$ izometricky na H/Z .*

Značení: Nechť X je normovaný lineární prostor.

- Je-li $A \subset X$, označme

$$A^\perp = \{f \in X^*; \forall x \in A : f(x) = 0\}.$$

- Je-li $B \subset X^*$, označme

$$B_\perp = \{x \in X; \forall f \in B : f(x) = 0\}.$$

Poznámky: (1) Je-li X prostor se skalárním součinem, pak symbolem $A^\perp$ se může značit buď ortogonální doplněk (jde tedy o podprostor X) nebo podprostor X^* dle výše uvedené definice. Kterou možnost máme na mysli, vyplýne z kontextu.

(2) Nechť H je Hilbertův prostor a $I : H \rightarrow H^*$ je sdruženě lineární izometrie daná Větou II.15. Pro $A \subset H$ nechť B_1 je ortogonální doplněk A v H (tj. $B_1 = A^\perp$ dle definice z oddílu I.5) a $B_2 = A^\perp$ ve smyslu definice z tohoto oddílu. Pak $B_2 = I(B_1)$.

Věta 5 (dualita podprostorů a kvocientů). *Nechť X je normovaný lineární prostor a Z jeho uzavřený podprostor.*

- Nechť $q : X \rightarrow X/Z$ je kanonické kvocientové zobrazení. Pak zobrazení $T : (X/Z)^* \rightarrow X^*$ definované vzorcem $T(f) = f \circ q$ je izometrie $(X/Z)^*$ na $Z^\perp$.*
- Zobrazení $R : f \mapsto f|_Z$ je kvocientové zobrazení X^* na Z^* , jehož jádro je $Z^\perp$. Tedy zobrazení $\tilde{R}$ z Tvzení 3(b) je izometrie $X^*/Z^\perp$ na Z^* .*

Tvrzení 6. *Kvocient reflexivního prostoru je opět reflexivní prostor.*

Věta 7 (univerzalita $\ell^\infty(\Gamma)$ a $\ell^1(\Gamma)$).

- Každý Banachův prostor je izometrický uzavřenému podprostoru $\ell^\infty(\Gamma)$ pro vhodnou množinu Γ . Separabilní Banachův prostor je izometrický podprostoru ℓ^∞ .*
- Každý Banachův prostor je izometrický nějakému kvocientu prostoru $\ell^1(\Gamma)$ pro vhodnou množinu Γ . Separabilní Banachův prostor je izometrický nějakému kvocientu prostoru ℓ^1 .*