

III.4 Duální a adjungované operátory

Definice. Nechť X a Y jsou normované lineární prostory a $T \in L(X, Y)$. Pro každé $f \in Y^*$ definujeme zobrazení $T'f : X \rightarrow \mathbb{F}$ vzorcem

$$T'f(x) = f(Tx), \quad x \in X, \quad \text{neboli } T'f = f \circ T.$$

Pak zobrazení $T' : f \mapsto T'f$ se nazývá **duálním operátorem k T** .

Poznámky:

- Z Větičky I.15(d) plyne, že pro každé $f \in Y^*$ je $T'f \in X^*$ a $\|T'f\| \leq \|T\| \cdot \|f\|$. Odtud snadno plyne, že $T' \in L(Y^*, X^*)$.
- Duální operátor k T' značíme T'' .
- Duálnímu operátoru se někdy říká adjungovaný (nebo banachovsky adjungovaný) a někdy se značí T^* nebo T^t . My se přidržíme značení T' , symbol T^* vyhradíme pro níže definovaný (hilbertovsky) adjungovaný operátor.

Větička 19 (základní vlastnosti duálních operátorů). Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory. Pak platí:

- Zobrazení $T \mapsto T'$ je lineární izometrie $L(X, Y)$ do $L(Y^*, X^*)$.
- $(\text{Id}_X)' = \text{Id}_{X^*}$
- Je-li $S \in L(Y, Z)$ a $T \in L(X, Y)$, pak $(ST)' = T'S'$.
- Je-li $T \in L(X, Y)$, pak $T'' \circ \varkappa_X = \varkappa_Y \circ T$.

Poznámka: Pokud ztotožníme $\varkappa_X(X)$ a X (a podobně pro Y), pak bod (d) předchozího tvrzení znamená, že restrikce T'' na X je T .

Věta 20 (o adjungovaném operátoru). Nechť H_1 a H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in L(H_1, H_2)$. Pak existuje právě jeden operátor $T^* \in L(H_2, H_1)$, pro který platí

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \text{pro } x \in H_1, y \in H_2.$$

Poznámky:

- Operátor T^* se nazývá (hilbertovsky) **adjungovaným operátorem k T** .
- Nechť $I_1 : H_1 \rightarrow H_1^*$ a $I_2 : H_2 \rightarrow H_2^*$ jsou sdruženě lineární izometrie z Věty II.15. Pak pro každé $T \in L(H_1, H_2)$ platí $T^* = I_1^{-1}T'I_2$.

Větička 21 (základní vlastnosti adjungovaných operátorů). Nechť H_1, H_2, H_3 jsou Hilbertovy prostory. Pak platí:

- Zobrazení $T \mapsto T^*$ je sdruženě lineární izometrie $L(H_1, H_2)$ na $L(H_2, H_1)$.
- $(\text{Id}_{H_1})^* = \text{Id}_{H_1}$
- Je-li $S \in L(H_2, H_3)$ a $T \in L(H_1, H_2)$, pak $(ST)^* = T^*S^*$.
- Je-li $T \in L(H_1, H_2)$, pak $T^{**} (= (T^*)^*) = T$.

Značení: Nechť X a Y jsou normované lineární prostory a $T \in L(X, Y)$. Obor hodnot operátoru T , tj. množinu $T(X)$ značíme symbolem $R(T)$.

Věta 22.

- (1) Nechť X a Y jsou normované lineární prostory a $T \in L(X, Y)$. Pak platí:

$$\ker T' = (R(T))^\perp, \quad \overline{R(T)} = (\ker T')_\perp, \quad \ker T = (R(T'))_\perp.$$

- (2) Nechť H_1 a H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in L(H_1, H_2)$. Pak platí:

$$\ker T^* = (R(T))^\perp, \quad \overline{R(T)} = (\ker T^*)^\perp, \quad \ker T = (R(T^*))^\perp, \quad \overline{R(T^*)} = (\ker T)^\perp,$$

kde symbol $^\perp$ znamená ortogonální doplněk z oddílu I.5.

Poznámka: V bodě (1) předchozí věty chybí vztah mezi $R(T')$ a $(\ker T)^\perp$. To proto, že $(\ker T)^\perp$ je rovno uzávěru $R(T')$ ve w^* topologii (tj. v topologii bodové konvergence na X). Toto přesahuje rámec Úvodu do funkcionální analýzy, bude to vysvětleno (v obecnějším kontextu) v pokročilejším kurzu.

Důsledek 23.

- (1) Nechť X a Y jsou normované lineární prostory a $T \in L(X, Y)$. Pak operátor T' je prostý, právě když $R(T)$ je hustý v Y .
- (2) Nechť H_1 a H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in L(H_1, H_2)$. Pak operátor T^* je prostý, právě když $R(T)$ je hustý v H_2 . Podobně T je prostý, právě když $R(T^*)$ je hustý v H_1 .

Věta 24. Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X, Y)$. Pak T je izomorfismus X na Y , právě když T' je izomorfismus Y^* na X^* .

Poznámky:

- Implikace $\Rightarrow$ ve Větě 24 platí i bez předpokladu úplnosti X a Y , pro opačnou implikaci je úplnost podstatná.
- Platí i zobecnění Věty 24:
 - (a) T je izomorfismus X do Y , právě když T' je na (úplnost není potřeba).
 - (b) T je na, právě když T' je izomorfismus Y^* do X^* (úplnost je podstatná).
 Důkaz tvrzení (a) a implikace $\Rightarrow$ v tvrzení (b) jsou snadné, implikace $\Leftarrow$ plyne z kombinace Věty III.8, Lemmatu III.9 a Věty II.11(2).