

III.6 Spektrum omezeného lineárního operátoru

Úmluva: V tomto oddíle jsou všechny Banachovy prostory komplexní.

Připomenutí: Nechť X je Banachův prostor a $T \in L(X)$.

- K T existuje inverzní zobrazení $T^{-1} : X \rightarrow X$, právě když T je prostý a na.
- Pokud T je prostý a na (tj., pokud existuje T^{-1}), pak již $T^{-1} \in L(X)$.
- Inverzní zobrazení je charakterizováno následovně: $S = T^{-1} \Leftrightarrow S \circ T = T \circ S = \text{Id}_X$.

Definice. Nechť X je Banachův prostor a $T \in L(X)$. Operátor T se nazývá **invertibilní**, pokud existuje $S \in L(X)$, pro který $ST = TS = \text{Id}_X$.

Poznámka: T je invertibilní, právě když je prostý a na, tj. právě když je to izomorfismus X na X . Operátor S z definice je jednoznačně určen a rovná se T^{-1} . Tedy, operátor T je invertibilní, právě když k němu existuje inverzní zobrazení.

Tvrzení 29 (Neumannova řada). Nechť X je Banachův prostor.

- (a) Nechť $T \in L(X)$, $\|T\| < 1$. Pak operátor $\text{Id}_X - T$ je invertibilní a platí
- $$(\text{Id}_X - T)^{-1} = \text{Id}_X + T + T^2 + T^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} T^n,$$
- přičemž uvedená řada konverguje absolutně.
- (b) Nechť $S, T \in L(X)$, přičemž T je invertibilní a $\|S - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$. Pak S je invertibilní a platí
- $$S^{-1} = T^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\text{Id}_X - ST^{-1})^n.$$

Definice. Nechť X je Banachův prostor a $T \in L(X)$.

- **Rezolventní množinou** operátoru T rozumíme množinu $\rho(T)$ definovanou předpisem

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \text{Id}_X - T \text{ je invertibilní}\}.$$

- **Rezolventní funkci** operátoru T rozumíme funkci

$$\lambda \mapsto (\lambda \text{Id}_X - T)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(T).$$

Hodnotu rezolventní funkce v bodě λ obvykle značíme $R_\lambda(T)$.

- **Spektrum** operátoru T rozumíme množinu $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$, tj.

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \text{Id}_X - T \text{ není invertibilní}\}.$$

- **Vlastním číslem** operátoru T rozumíme každé $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že $\lambda \text{Id}_X - T$ není prostý. Tj. takové $\lambda \in \mathbb{C}$, pro které existuje $x \in X \setminus \{0\}$ splňující $Tx = \lambda x$. Každé takové x se nazývá **vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu** λ . Množinu všech vlastních čísel operátoru T značíme $\sigma_p(T)$ a nazýváme **bodovým spektrem** operátoru T .

Věta 30. Nechť X je Banachův prostor a $T \in L(X)$. Pak platí:

- (a) $\rho(T)$ je otevřená podmnožina $\mathbb{C}$.
- (b) Pro každé $x \in X$ a $x^* \in X^*$ je funkce $\lambda \mapsto x^*((\lambda \text{Id}_X - T)^{-1}x)$ holomorfní na množině $\rho(T)$.
- (c) $\sigma(T)$ je neprázdná kompaktní podmnožina $\mathbb{C}$, jest $\sigma(T) \subset B(0, \|T\|)$.

Poznámka: Komplexní funkce je na otevřené podmnožině $\mathbb{C}$ **holomorfní**, pokud lze v nějakém okolí každého bodu vyjádřit mocninnou řadou. (Více o těchto funkcích se vyučuje v kurzu Úvod do komplexní analýzy.) Tvrzení (b) pak snadno plyne z Tvrzení 29.

Větička 31. Nechť X je Banachův prostor a $T \in L(X)$. Pak $\sigma(T) = \sigma(T')$.

Tvrzení 32. Nechť X je Banachův prostor a $T \in L(X)$. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ jsou navzájem různá vlastní čísla a $x_1, \dots, x_n \in X$ nějaké jim (po řadě) příslušné vlastní vektory. Pak jsou vektory $x_1, \dots, x_n$ lineárně nezávislé.