

III.7 Spektrální teorie kompaktních operátorů

Úmluva: V tomto oddíle jsou všechny Banachovy prostory komplexní.

Větička 33. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in K(X)$. Pak platí:*

- (a) *Pokud je X nekonečnědimenzionální, pak $0 \in \sigma(T)$.*
- (b) *Pokud $R(T)$ je uzavřený, pak $\dim R(T) < \infty$, tj. $T \in F(X)$.*
- (c) *Pokud $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pak $\dim \ker(\lambda \text{Id}_X - T) < \infty$ a $R(\lambda \text{Id}_X - T)$ je uzavřený.*

Věta 34 (Fredholmova alternativa). *Nechť X je Banachův prostor, $T \in K(X)$ a $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda \text{Id}_X - T$ je prostý, právě když je na.*

Věta 35 (o spektru kompaktního operátoru). *Nechť X je Banachův prostor a $T \in K(X)$. Pak platí:*

- (a) *$\sigma(T) \subset \sigma_p(T) \cup \{0\}$ (pokud X je nekonečné dimenze, platí rovnost).*
- (b) *Pro každé $r > 0$ je množina $\{\lambda \in \sigma(T); |\lambda| > r\}$ konečná.*

Definice. *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$.*

- Říkáme, že T je **samoadjungovaný** (nebo též **hermiteovský**), pokud $T = T^*$.
- **Numerický obor hodnot** operátoru T definujeme vzorcem

$$W(T) = \{\langle Tx, x \rangle; x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Tvrzení 36 (o spektru a numerickém oboru hodnot). *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$. Pak $\sigma_p(T) \subset W(T)$ a $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$.*

Tvrzení 37 (o samoadjungovaných operátorech). *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ je samoadjungovaný. Pak platí:*

- (i) $W(T) \subset \mathbb{R}$.
- (ii) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.
- (iii) *Nechť $x_1, x_2 \in H$ jsou vlastní vektory T příslušné různým vlastním číslům. Pak $x_1 \perp x_2$.*
- (iv) $\text{Ker } T = (R(T))^\perp$ a $(\text{Ker } T)^\perp = \overline{R(T)}$.
- (v) T je prostý, právě když $R(T)$ je hustý v H .
- (vi) *Nechť $m_T = \inf W(T)$ a $M_T = \sup W(T)$. Pak $\|T\| = \max\{M_T, -m_T\}$ a $M_T, m_T \in \sigma(T)$.*

Věta 38 (Hilbert-Schmidtova věta o spektrálním rozkladu kompaktního samoadjungovaného operátoru). *Nechť H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ je nenulový kompaktní samoadjungovaný operátor. Pak existuje ortonormální báze H tvořená vlastními vektory operátoru T . Navíc T lze vyjádřit vzorcem*

$$Tx = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n, \quad x \in H,$$

kde

- (i) $N \in \mathbb{N}$ nebo $N = \infty$;
- (ii) $(x_n)_{n=1}^N$ je ortonormální systém v H ;
- (iii) $\lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pro každé n .

Pak každé λ_n je vlastní číslo T a x_n je k němu příslušný vlastní vektor; každé nenulové vlastní číslo se ve vyjádření opakuje tolikrát, kolik je jeho násobnost (tj. $\dim \text{Ker}(\lambda I - T)$), $(x_n)_{n=1}^N$ je ortonormální báze $\overline{R(T)}$.

Konstrukce Schmidty reprezentace kompaktních operátorů:

Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in K(H) \setminus \{0\}$.

- (1) Operátor T^*T je kompaktní a samoadjungovaný, $T^*T \neq 0$. Nechť

$$T^*Tx = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n, \quad x \in H$$

je vyjádření T^*T z Věty 38.

- (2) Protože $W(T^*T) \subset [0, +\infty)$, jsou čísla λ_n nezáporná.
- (3) Definujme operátor S vzorcem

$$Sx = \sum_{n=1}^N \sqrt{\lambda_n} \langle x, x_n \rangle x_n, \quad x \in H.$$

Pak S je samoadjungovaný, kompaktní a $S^2 = T^*T$.

- (4) Vektory $y_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}Tx_n$ tvoří ortonormální systém.
- (5) Platí

$$Tx = \sum_{n=1}^N \sqrt{\lambda_n} \langle x, x_n \rangle y_n, \quad x \in H.$$

Tento vzorec se nazývá **Schmidtova reprezentace operátoru T** .