

IV. Fourierova transformace

Úmluva: V této kapitole budeme symbolem $\|\mathbf{x}\|$ pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ označovat euklidovskou normu prvku $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.

IV.1 Konvoluce funkcí na $\mathbb{R}^d$

Značení. Nechť $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{F}$ je funkce.

- Pro $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ definujme funkci $\tau_{\mathbf{y}}f$ (tzv. **posun** funkce f) vzorcem

$$(\tau_{\mathbf{y}}f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

- **Otočením** funkce f budeme rozumět funkci $\check{f}$ definovanou vzorcem

$$\check{f}(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Poznámka: Tyto operace mají smysl i pro funkce definované pouze na nějaké podmnožině $\mathbb{R}^d$. Pak definiční obor posunu bude patřičně posunutý definiční obor f a definiční obor otočení bude otočený definiční obor f .

Definice. Nechť $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{F}$ jsou měřitelné funkce. Jejich **konvolucí** $f * g$ rozumíme funkci definovanou předpisem

$$f * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y})g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

pro ta $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, pro která integrál existuje.

Poznámky:

- Existence ani hodnota uvedeného integrálu se nezmění, pokud f a g změníme na množině míry nula. Protože pro každou měřitelnou funkci f na $\mathbb{R}^d$ existuje borelovská funkce $\tilde{f}$ na $\mathbb{R}^d$, která se rovná f skoro všude, ve všech tvrzeních o konvoluci lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že zúčastněné funkce jsou borelovské.
- Ze symetrie a translační invariance Lebesgueovy míry plyne, že $f * g = g * f$ pro libovolné dvě měřitelné funkce f, g na $\mathbb{R}^d$.
- Konvoluci lze vyjádřit vzorcem $f * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \tau_{\mathbf{x}}\check{g}$.

Věta 1 (konvoluce funkcí z L^1 a L^p).

- (a) Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pak funkce $f * g$ je skoro všude definovaná a skoro všude konečná. Navíc $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.
- (b) Operace $*$ je na $L^1(\mathbb{R}^d)$ komutativní a asociativní. Prostor $L^1(\mathbb{R}^d)$ opatřený navíc touto operací je komutativní algebra.
- (c) Nechť $p \in [1, \infty]$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ a $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pak funkce $f * g$ je skoro všude definovaná a skoro všude konečná. Navíc $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ a
- $$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_1.$$