# IV.3 Fourierova transformace a Schwartzův prostor

**Značení a úmluva:** Připomeňme, že $\lambda^d$ značí Lebesgueovu míry na $\mathbb{R}^d$. Označme $m_d = (2\pi)^{-d/2}\lambda^d$. V tomto oddílu budeme prostorem $L^p(\mathbb{R}^d)$ rozumět prostor $L^p(m_d)$. Taktéž konvoluci budeme uvažovat vůči této míře, tj.

$$f * g(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}m_d(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

Navíc, všechny prostory uvažujeme komplexní.

**Definice.** Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. **Fourierovou transformací** funkce $f$ nazýváme funkci $\widehat{f}$ definovanou vzorcem

$$\widehat{f}(\boldsymbol{t}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})e^{-i\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}\rangle}\,\mathrm{d}m_d(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})e^{-i\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}\rangle}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d.$$

**Poznámky:**

- $\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}\rangle$ značí standardní skalární součin $\boldsymbol{t}$ a $\boldsymbol{x}$ v $\mathbb{R}^n$. V literatuře se často značí $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{x}$, my se přidržíme značení z první kapitoly.
- Pro $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d$ definujme funkci $e_{\boldsymbol{t}}$ vzorcem $e_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x}) = e^{i\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{x}\rangle}$ pro $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$. Tyto funkce se často nazývají **charaktery na** $\mathbb{R}^d$. Fourierova transformace lze jejich pomocí vyjádřit takto:

$$\widehat{f}(\boldsymbol{t}) = (f * e_{\boldsymbol{t}})(0) = \int_{\mathbb{R}^d} f\cdot e_{-\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}m_d, \quad \text{pro } \boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d \text{ a } f\in L^1(\mathbb{R}^d)$$

- Každý charakter $\boldsymbol{e_t}$ je spojitá funkce splňující $|\boldsymbol{e_t}| = 1$ na $\mathbb{R}^d$. Odtud je zřejmé, že pro každé $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ je funkce $\widehat{f}$ definovaná na $\mathbb{R}^d$ a splňuje $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \le \|f\|_1$.

**Tvrzení 8** (základní vlastnosti Fourierovy transformace). *Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$. Pak platí:*

(a) $\widehat{\tau_{\boldsymbol{y}} f} = e_{-\boldsymbol{y}} \cdot \widehat{f}$.

(b) $\widehat{e_{\boldsymbol{y}} \cdot f} = \tau_{\boldsymbol{y}} \widehat{f}$.

(c) $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.

(d) *Nechť* $\lambda > 0$ *a* $h(\boldsymbol{x}) = f(\frac{\boldsymbol{x}}{\lambda})$ *pro* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$. *Pak* $\widehat{h}(\boldsymbol{t}) = \lambda^d \widehat{f}(\lambda \boldsymbol{t})$ *pro* $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d$.

(e) $\int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \widehat{g} \, \mathrm{d}m_d = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} \cdot g \, \mathrm{d}m_d$.

(f) *Nechť* $j \in \{1, \dots, d\}$ *a* $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. *Pak* $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\boldsymbol{t}) = i t_j \widehat{f}(\boldsymbol{t})$ *pro* $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d$.

(g) *Nechť* $j \in \{1, \dots, d\}$ *a funkce* $g(\boldsymbol{x}) = x_j f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, *patří do* $L^1(\mathbb{R}^d)$. *Pak* $\widehat{g} = i \frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}$.

(h) *Funkce* $\widehat{f}$ *je spojitá na* $\mathbb{R}^d$.

**Definice a značení:**

- Pro $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d$ a multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ označme $\boldsymbol{t}^\alpha = t_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot t_d^{\alpha_d}$. (Stejné značení budeme používat i pro $\boldsymbol{t} \in \mathbb{C}^d$.)
- **Polynomem na** $\mathbb{R}^d$ rozumíme funkci $P$ na $\mathbb{R}^d$ tvaru

$$P(\boldsymbol{t}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq N} c_\alpha \boldsymbol{t}^\alpha, \quad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d,$$

  kde $N \in \mathbb{N}_0$ a $c_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq N$ jsou nějaká komplexní čísla (**koeficienty** polynomu $P$). Pokud navíc existuje multiindex $\alpha$, pro který $|\alpha| = N$ a $c_\alpha \neq 0$, říkáme, že polynom $P$ má **stupeň** $N$.
- Polynom na $\mathbb{R}^d$ chápeme vždy jako funkci na $\mathbb{R}^d$, tj. jako funkci $d$ reálných proměnných. Nicméně do takového polynomu lze zřejmým způsobem dosadit i prvky $\mathbb{C}^d$, což se bude občas hodit.
- Je-li $P$ polynom na $\mathbb{R}^d$, označme symbolem $\breve{P}$ polynom na $\mathbb{R}^d$ definovaný vzorcem $\breve{P}(\boldsymbol{t}) = P(i\boldsymbol{t})$ pro $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d$, tj. (je-li $P$ výše uvedeného tvaru)

$$\breve{P}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq N} i^{|\alpha|} c_\alpha \boldsymbol{t}^\alpha, \quad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d.$$

- Je-li $P$ polynom na $\mathbb{R}^d$ výše uvedeného tvaru a $f$ je funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$ na $\mathbb{R}^d$, pak symbolem $P(D)f$ značíme funkci definovanou vzorcem

$$P(D)f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq N} c_\alpha D^\alpha f.$$

  (Tato definice má smysl i pro funkce třídy $\mathcal{C}^N$.)

**Důsledek 9.** *Nechť $N \in \mathbb{N}$.*

(a) *Pokud $f \in C^N(\mathbb{R}^d)$ a pro každý multiindex $\alpha$ splňující $|\alpha| \le N$ platí $D^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pak pro tyto multiindexy platí $\widehat{D^\alpha f}(\boldsymbol{t}) = i^{|\alpha|}\boldsymbol{t}^\alpha \widehat{f}(\boldsymbol{t})$ pro $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d$.*

(b) *Pokud pro každý polynom $P$ na $\mathbb{R}^d$ stupně nejvýše $N$ platí $P \cdot f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pak $\widehat{f}$ je třídy $C^N$ a pro multiindex $\alpha$ splňující $|\alpha| \le N$ platí $D^\alpha \widehat{f}(\boldsymbol{t}) = (-i)^{|\alpha|}(\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}^\alpha f(\boldsymbol{x}))\widehat{\ }(\boldsymbol{t})$.*

**Lemma 10.**

(a) *$D^\alpha e_{\boldsymbol{t}} = i^{|\alpha|}\boldsymbol{t}^\alpha \boldsymbol{e_t}$ pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.*

(b) *Je-li $P$ polynom na $\mathbb{R}^d$, pak $P(D)e_{\boldsymbol{t}} = \breve{P}(\boldsymbol{t}) \cdot e_{\boldsymbol{t}}$.*

**Definice.** **Schwartzovým prostorem na** $\mathbb{R}^d$ rozumíme prostor funkcí

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d); \quad \begin{array}{c} \text{funkce } \boldsymbol{x} \mapsto (1 + \|\boldsymbol{x}\|^2)^N D^\alpha f(\boldsymbol{x}) \\ \text{je omezená na } \mathbb{R}^d \\ \text{pro každé } N \in \mathbb{N}_0 \text{ a každý multiindex } \alpha \end{array} \right\}.$$

Nehrozí-li nedorozumění (tj., je-li $d$ předem dáno), místo $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ píšeme jen $\mathscr{S}$.

**Poznámka.** Je-li $g$ měřitelná funkce na $[0, \infty)$, pak platí

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(\|x\|)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = d \cdot \lambda^d(B(\boldsymbol{o}, 1)) \cdot \int_0^\infty r^{d-1} g(r)\,\mathrm{d}r,$$

má-li jedna strana smysl. Tento vzorec lze snadno dokázat, je-li $g$ charakteristická funkce intervalu, s využitím regularity Lebesgueovy míry se dokáže pro charakteristické funkce měřitelných množin a dále se postupuje způsobem standardním v teorii míry. Z tohoto vzorce se snadno plyne, že

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1 + \|\boldsymbol{x}\|^2)^m}\,\mathrm{d}m_d < \infty \text{ pro } m > \frac{d}{2}.$$

**Věta 11** (vlastnosti Schwartzova prostoru a Fourierovy transformace na něm).

(a) *$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S} \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \cap \bigcap_{p \in [1,\infty]} L^p(\mathbb{R}^d)$.*

(b) *Je-li $f \in \mathscr{S}$ a $P$ je polynom na $\mathbb{R}^d$, pak*

$$\widehat{P(D)f} = \breve{P} \cdot \widehat{f}, \quad \widehat{P \cdot f} = \breve{P}(D)\widehat{f}.$$

(c) *Fourierova transformace je lineární zobrazení $\mathscr{S}$ do $\mathscr{S}$.*

**Důsledek 12.** *Fourierova transformace je spojité lineární zobrazení prostoru $L^1(\mathbb{R}^d)$ do prostoru $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, jehož norma je nejvýše 1.*

**Lemma 13.** *Uvažme funkci $\phi_d(\boldsymbol{x}) = e^{-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$. Pak platí $\phi_d \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ a $\widehat{\phi_d} = \phi_d$.*

**Věta 14** (věta o inverzi pro Schwartzův prostor).

(a) *Pro každé* $f \in \mathscr{S}$ *platí*

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} \cdot e_{\boldsymbol{x}} \, \mathrm{d}m_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\boldsymbol{t}) e^{i\langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{x} \rangle} \, \mathrm{d}\boldsymbol{t}.$$

(b) *Fourierova transformace je lineární bijekce* $\mathscr{S}$ *na* $\mathscr{S}$. *Navíc pro každé* $f \in \mathscr{S}$ *platí*

$$\widehat{\widehat{f}} = \check{f}, \quad \widehat{\widehat{\widehat{\widehat{f}}}} = f.$$

**Důsledek 15** (věta o inverzi pro případ integrovatelné $\widehat{f}$). *Nechť* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *je taková, že* $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. *Pak pro skoro všechna* $x \in \mathbb{R}^d$ *platí*

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} \cdot e_{\boldsymbol{x}} \, \mathrm{d}m_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\boldsymbol{t}) e^{i\langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{x} \rangle} \, \mathrm{d}\boldsymbol{t}.$$

**Poznámka:** V důkazu Důsledku 15 se hodí následující pomocné tvrzení: $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $\int_{\mathbb{R}^d} fg = 0$ pro každé $g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d) \implies f = 0$ skoro všude.

**Tvrzení 16.** *Pro* $f, g \in \mathscr{S}$ *platí* $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$. *Speciálně, prostor* $\mathscr{S}$ *je uzavřený na konvoluci.*

**Věta 17** (Plancherelova věta).

(a) *Pro každé* $f \in \mathscr{S}$ *platí* $\left\| \widehat{f} \right\|_2 = \|f\|_2$.

(b) *Existuje právě jedna lineární izometrie* $\mathcal{P}$ *prostoru* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *na* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *taková, že* $\mathcal{P}(f) = \widehat{f}$ *pro* $f \in \mathscr{S}$.

(c) *Pro* $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ *platí* $\mathcal{P}(f) = \widehat{f}$.