

Věta I.34 H Hilbertův prostor, $C \subset H$ konvexní, uzavřený, neprázdný
 Pak $\forall x \in H \exists ! y \in C : \|y - x\| = \text{dist}(x, C)$ ($= \inf \{\|x - z\|, z \in C\}$)

Důk: • Poloh $x \in C$, volíme $y = x$

• Necht $x \notin C$. Pak $c := \text{dist}(x, C) > 0$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $C_n = \{y \in C, \|x - y\| \leq c + \frac{1}{n}\}$ ($= C \cap B(x, c + \frac{1}{n})$)

zřejmě: C_n je konvexní a uzavřený

• navíc $C_n \neq \emptyset$ ($\text{dist}(x, C) = c \Rightarrow \exists y \in C : \|y - x\| < c + \frac{1}{n}$)

Pak $y \in C_n$

• $C_{n+1} \subset C_n$ monoton.

Ukážeme, že $\text{diam } C_n \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \Gamma y, z \in C_n &\Rightarrow \|x - y\| \leq c + \frac{1}{n}, \|x - z\| \leq c + \frac{1}{n} \\ \Rightarrow 4(c + \frac{1}{n})^2 &\geq 2(\|x - y\|^2 + \|x - z\|^2) \geq \|x - y + x - z\|^2 + \|(x - y) - (x - z)\|^2 \\ &= 4\|x - \underbrace{\frac{y+z}{2}}_{\in C}\|^2 + \|z - y\|^2 \\ &\leq 4c^2 + \|z - y\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{Tedy: } \|z - y\|^2 \leq 4(c + \frac{1}{n})^2 - 4c^2 = \frac{4}{n^2} \cdot (2c + \frac{1}{n})$$

$$\text{Tedy } \forall y, z \in C_n : \|z - y\| \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{2c + \frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \text{diam } C_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{2c + \frac{1}{n}} \rightarrow 0$$

Proto $\bigcap_n C_n$ obsahuje právě jeden bod. A to je ten nejblížejší bod.

Tuzem I.35 H, C jako ve větě I.34. Necht $x \in H$. Pak $y \in C$ je nejblížejší bod k x , právě když

$$(*) \quad \forall z \in C : \text{Re} \langle x - y, z - y \rangle \leq 0$$

Poloh navíc $C \subset H$, pak $y \in C$ je nejblížejší bod k x , právě když

$$(**) \quad \forall z \in C : \langle x - y, z \rangle = 0$$

Dk: y^L je negativ über x

Definição: $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência

$$\forall z \in C: \|y - x\| \leq \|z - x\|$$

$\uparrow$: deadline $t=1$ $\Downarrow$: $y + t \cdot (z - y) \in C$

$\forall z \in C \quad \forall t \in [0,1] : \quad \|y - x\| \leq \|y + t \cdot (z - y) - x\|$

$$\begin{aligned} \langle y-x, y-x \rangle &\leq \underbrace{\langle y+t \cdot (z-y) - x, y+t \cdot (z-y) - x \rangle}_{=} \\ &\quad \langle y-x, y-x \rangle + t \cdot \langle y-x, z-y \rangle \\ &\quad + t \langle z-y, y-x \rangle + t^2 \langle z-y, z-y \rangle \end{aligned}$$

$$= \langle y-x, y-x \rangle + 2t \cdot \operatorname{Re} \langle y-x, z-y \rangle + t^2 \langle z-y, z-y \rangle$$

$$0 \leq 2t \operatorname{Re} \langle y-x, z-y \rangle + t^2 \langle z-y, z-y \rangle$$

$$0 \leq 2 \operatorname{Re} \langle y - x_1, z - y \rangle + t \langle z - y, z - y \rangle$$

$$\forall z \in C \quad \forall t \in (0,1): \quad 0 \leq 2\operatorname{Re} \langle y - x, z - y \rangle + t \langle z - y, z - y \rangle$$

$$\Downarrow \quad \psi: \lim_{t \rightarrow 0^+} \psi_t \rightarrow 0^+ \quad \uparrow \quad \langle z-y, z-y \rangle \geq 0$$

$$\forall z \in C : 0 \leq \operatorname{Re} \langle y-x, z-y \rangle$$

ii) $\forall z \in C : \operatorname{Re} \langle x-y, z-y \rangle \leq 0, \quad \text{co } \bar{C} \neq \emptyset \quad (*)$

Polukond $C \subset CH_1$ p.e.:

$$\begin{aligned} \forall z \in C : b \langle x-y, z-y \rangle \leq 0 & \iff \forall z \in C : b \langle x-y, z \rangle \leq 0 \\ & \Leftarrow: z-y \in C \\ & \Rightarrow: z = (z+y)-y, \text{ mitom } z+y \in C \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Invariant
 $\Rightarrow: z \in G \Rightarrow -z \in G$

$$\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} \langle x - y, z \rangle = 0$$

$\uparrow$ $\Downarrow$ $\mathbb{D}$: "twice"
 $\Downarrow: z \in \mathbb{C} \Rightarrow iz \in \mathbb{C} \Rightarrow 0 = \operatorname{Re} \langle x - y_1, iz \rangle = \operatorname{Re} (-i \langle x - y_1, z \rangle) = \operatorname{Im} \langle x - y_1, z \rangle$
 $\nexists z \in \mathbb{C}: \langle x - y_1, z \rangle = 0$