

Věta I.37

$H$  Hilbertův prostor,  $Y \subset H$  uzavřený.  $x \in H \dots Px \in Y$  nejmenší bod

(e)  $P$  je lineární projekce,  $\|P\| \leq 1$ ,  $P(H) = Y$ ,  $\ker P = Y^\perp$

$$\Gamma \text{ T I.35} \Rightarrow (y = Px \Leftrightarrow y \in Y \text{ \& } y - x \perp Y)$$

lineární  $P: (a)x \in X, a \in \mathbb{F} \Rightarrow a Px \in Y$

$$\begin{aligned} \bullet \forall z \in Y: \langle x - Px, z \rangle &= a \langle x - Px, z \rangle = 0 \\ \Rightarrow x - Px &\perp Y \end{aligned}$$

$$\text{Odtud } P(ax) = aPx$$

$$(\square) x_1, x_2 \in X \Rightarrow Px_1 + Px_2 \in Y$$

$$\begin{aligned} \bullet \forall z \in Y: \langle x_1 + x_2 - (Px_1 + Px_2), z \rangle &= \\ &= \underbrace{\langle x_1 - Px_1, z \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle x_2 - Px_2, z \rangle}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 - (Px_1 + Px_2) \perp Y$$

$$\text{Teď } P(x_1 + x_2) = Px_1 + Px_2$$

Tedy  $P$  je lineární zobrazení

Dále  $P(H) = Y$  (z předchozí definice,  $\exists x \in Y \Rightarrow Px = x$ )

a  $P$  je projekce ( $Px = x$  pro  $x \in Y$ )

$$\ker P = Y^\perp: Px = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 \perp Y \\ 0 \in Y \end{cases} \Leftrightarrow x \in Y^\perp$$

$$\|P\| \leq 1: \|x\|^2 = \|Px + x - Px\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 \geq \|Px\|^2$$

$\uparrow$   
Věta 6,  $Px \perp x - Px$

(c)  $\forall x \in H: (I - P)x$  je bod v  $Y^\perp$  nejmenší z  $x$

$Y^\perp \subset H$  uzavřený  $\Rightarrow$  lze použít T I.35

$$\bullet (I - P)x \in Y^\perp, \text{ protože } (I - P)x = x - Px \perp Y$$

$$\bullet x - (I - P)x \perp Y^\perp, \text{ protože } x - (I - P)x = Px \in Y, \text{ tedy } P \perp Y^\perp$$

(b)  $I-P$  je lineárny projektor,  $\|I-P\| \leq 1$ ,  $(I-P)(Y) = Y^\perp$ ,  $\ker(I-P) = Y$

┌ z (c) a potom z (a) aplikovaného na  $Y^\perp$  plynie, že  $I-P$  je lineárny projektor,  
 $\|I-P\| \leq 1$ ,  $(I-P)(Y) = Y^\perp$ .

└ Dále  $x \in \ker(I-P) \Leftrightarrow (I-P)x = 0 \Leftrightarrow x - Px = 0 \Leftrightarrow x = Px \Leftrightarrow x \in Y$  ┘

(d)  $(Y^\perp)^\perp = Y$

┌ z (c) a z (a) aplikovaného na  $Y^\perp$  plynie, že  $\ker(I-P) = (Y^\perp)^\perp$   
 z (b) vieme, že  $\ker(I-P) = Y$ . Teda  $(Y^\perp)^\perp = Y$  ┘

(e)  $\forall x \exists! (y, z) : y \in Y, z \in Y^\perp : x = y + z$

┌ Plynie z Vety I.20 (c) a z bodu (a).

Priamo:  $x = \overbrace{Px}^{\in Y} + \overbrace{(x-Px)}^{\in Y^\perp} \Rightarrow$  existencie

jednoznaknosti:  $x = y + z, y \in Y, z \in Y^\perp$

$\Rightarrow Px = \underbrace{Py}_{=y} + \underbrace{Pz}_{=0} = y \Rightarrow y = Px, \text{ teda } z = x - Px$  ┘  
 ↑ def (a)