

Věta I.38 (Besselova nerovnost) H prostor se skalárním součinem
 $(e_j)_{j \in J}$ ON systém v $H \Rightarrow \sum_{j \in J} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

Důk: připomeneme, že $\sum_{j \in J} |\langle x, e_j \rangle|^2 = \sup \left\{ \sum_{j \in F} |\langle x, e_j \rangle|^2, F \subset J \text{ konečný} \right\}$

Zvolme tedy $F \subset J$ konečný a položíme $x_F := \sum_{j \in F} \langle x, e_j \rangle e_j$.

Paž $x_F \perp x - x_F$

Chceme $\langle x - x_F, x_F \rangle = 0$, neboť $\langle x, x_F \rangle = \langle x_F, x_F \rangle$

Počítáme:

$$\langle x, x_F \rangle = \langle x, \sum_{j \in F} \langle x, e_j \rangle e_j \rangle = \sum_{j \in F} \overline{\langle x, e_j \rangle} \langle x, e_j \rangle = \sum_{j \in F} |\langle x, e_j \rangle|^2$$

$$\langle x_F, x_F \rangle = \left\langle \sum_{j \in F} \langle x, e_j \rangle e_j, \sum_{k \in F} \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle =$$

$$= \sum_{j, k \in F} \langle x, e_j \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} \underbrace{\langle e_j, e_k \rangle}_{\substack{= 0 \text{ } j \neq k \\ = 1 \text{ } j = k}} = \sum_{j \in F} \langle x, e_j \rangle \overline{\langle x, e_j \rangle} = \sum_{j \in F} |\langle x, e_j \rangle|^2$$

Vidíme, že to vyjde stejné

Tedy $\|x\|^2 \stackrel{\text{VI.36}}{=} \|x_F\|^2 + \|x - x_F\|^2 \geq \|x_F\|^2 = \langle x_F, x_F \rangle \stackrel{\text{výsledek výše}}{=} \sum_{j \in F} |\langle x, e_j \rangle|^2$

Důležitá Věta I.39 H Hilbertov, $(e_j)_{j \in J}$ ON systém

(iv) $\Rightarrow$ (iii) triviální z definice

(iii) $\Rightarrow$ (ii) $(e_j)_{j \in J}$ ON báze $\Rightarrow \forall x \in H \exists (d_j)_{j \in J}$ koeficienty: $x = \sum_{j \in J} d_j e_j$

Z definice součtu každé v H plyne (viz oddíl I.4)

$\forall \varepsilon > 0 \exists F \subset J$ konečný: $\|x - \sum_{j \in F} d_j e_j\| < \varepsilon$

Tedy $x \in \overline{\text{span} \{e_j, j \in J\}}$. To dávámy splněno ON systém $(e_j)_{j \in J}$

(ii) $\Rightarrow$ (i) obměnou: $(e_j)_{j \in J}$ není maximální $\Rightarrow \exists x \in H, \|x\|=1, x \perp e_j, \forall j \in J$

Paž $x \perp \overline{\text{span} \{e_j, j \in J\}}$. Tedy $\overline{\text{span} \{e_j, j \in J\}} \neq H$
 (neobsahuje x)

(c) $\Rightarrow$ (iv) Necht $(e_j)_{j \in J}$ je maximální ON systém

Necht $x \in H$. Ukážeme, že $x = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j$

① Ta řada upraveno konverguje v H . K tomu použijeme B-C podmínku (Téma I.32 (a)). Tu ověříme s použitím Besselovy nerovnosti (Věta I.38):

Besselova nerovnost $\Rightarrow \sum_{j \in J} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$, speciálně ta řada konverguje, a tedy splňuje B-C podmínku:

$\forall \varepsilon > 0 \exists F_0 \subset J$ konečná $\forall F \subset J$ konečná, $F \cap F_0 = \emptyset : \sum_{j \in F} |\langle x, e_j \rangle|^2 < \varepsilon$

Stačí si uvědomit, že $\sum_{j \in F} |\langle x, e_j \rangle|^2 = \left\| \sum_{j \in F} \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2$

(viz výpočet normy dříve Věta I.38), dostaneme tedy B-C podmínku pro řadu $\sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j$ v H

Víme tedy, že ta řada konverguje v H , označme sádek y .

② $\forall j \in J : \langle y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle$

Necht $J_0 \subset J$ je libovolná. Pro $F \subset J$ konečnou označme $y_F := \sum_{j \in F} \langle x, e_j \rangle e_j$

Pohled $j_0 \in F$, zřejmě $\langle y_F, e_{j_0} \rangle = \langle x, e_{j_0} \rangle$

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists F_0 \subset J$ konečnou $\forall F \subset J$ konečnou, $F_0 \subset F : \|y - y_F\| < \varepsilon$
(z definice součtu řady, viz oddíl I.4)

Položíme $F := F_0 \cup \{j_0\}$

Pak $|\langle x, e_{j_0} \rangle - \langle y, e_{j_0} \rangle| = \underbrace{|\langle x, e_{j_0} \rangle - \langle y_F, e_{j_0} \rangle|}_{=0, j_0 \in F} + |\langle y_F, e_{j_0} \rangle - \langle y, e_{j_0} \rangle|$

$= |\langle y_F - y, e_{j_0} \rangle| \leq \|y_F - y\| \cdot \|e_{j_0}\| < \varepsilon$

ε libovolné $\Rightarrow \langle x, e_{j_0} \rangle = \langle y, e_{j_0} \rangle$

$$\textcircled{3} y = x$$

$$\text{z ②} \cup \text{me } y - x \perp e_j \text{ pro } j \in J$$

$$\text{z maximality } \{e_j\}_{j \in J} \text{ plyne } y - x = 0, \text{ t. } y = x \quad \downarrow$$

alternativní důkaz mize
 $(iv) \Rightarrow (v)$ Necht $x, y \in H$. Dřív (iv) máme

$$x = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j, \quad y = \sum_{j \in J} \langle y, e_j \rangle e_j$$

$$\text{Pro } F \subset J \text{ zvolíme polozíme } x_F = \sum_{j \in F} \langle x, e_j \rangle e_j, \quad y_F = \sum_{j \in F} \langle y, e_j \rangle e_j$$

$$\text{Paž } \langle x_F, y_F \rangle = \left\langle \sum_{j \in F} \langle x, e_j \rangle e_j, \sum_{k \in F} \langle y, e_k \rangle e_k \right\rangle =$$

$$= \sum_{j, k \in F} \langle x, e_j \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle} \underbrace{\langle e_j, e_k \rangle}_{\substack{= 0 \text{ pro } j \neq k \\ = 1 \text{ pro } j = k}} = \sum_{j \in F} \langle x, e_j \rangle \overline{\langle y, e_j \rangle}$$

$$\text{Ukážeme, že } \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle \overline{\langle y, e_j \rangle} = \langle x, y \rangle$$

$$\Gamma \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists F_0 \subset J \text{ konečný } \forall F \subset J \text{ konečný, } F \supset F_0;$$

$$\|x_F - x\| < \varepsilon, \quad \|y_F - y\| < \varepsilon$$

$$\text{Necht } F \subset J \text{ je konečný, } F \supset F_0. \quad \text{Paž:}$$

$$|\langle x, y \rangle - \sum_{j \in F} \langle x, e_j \rangle \overline{\langle y, e_j \rangle}| = |\langle x, y \rangle - \langle x_F, y_F \rangle|$$

$$= |\langle x - x_F, y \rangle + \langle x_F, y - y_F \rangle| \leq \underbrace{\|x - x_F\|}_{< \varepsilon} \|y\| + \underbrace{\|x_F\|}_{\substack{\leq \|x\| \\ \text{(Bessel)}}} \underbrace{\|y - y_F\|}_{< \varepsilon}$$

$$\leq \varepsilon (\|y\| + \|x\|). \quad \text{Teraz dokážeme hotov}$$

$$(v) \Rightarrow (vi) \text{ trivialní} \dots \text{dosačíme do (v) } y = x$$

$$(vi) \Rightarrow (v) \text{ obměna: Necht } \{e_j\}_{j \in J} \text{ není maximální. t. } \exists \text{ vektor } \|x\| = 1, \text{ t. } x \perp e_j \text{ pro } j \in J$$

$$\text{Paž } \|x\|^2 = 1 \neq 0 = \sum_{j \in J} |\langle x, e_j \rangle|^2.$$

Důsledek I.40 Každý Hilbertův prostor má OVB bázi.

Důk: Aplická Zornova lemma dostaneme existenci maximálního OVSystému.
Dle VI.3d je to OVB báze.

Důsledek I.41 (Riesz-Fischerova věta) H Hilbertův prostor, $(e_j)_{j \in J}$ OVB báze
Pro $T: \ell^2(J) \rightarrow H$ definovanou předpisem $Tf = \sum_{j \in J} f(j)e_j$
je lineární izometrie prostor $\ell^2(J)$ na H .

Důk: ① Definice zobrazení $S: H \rightarrow \ell^2(J)$ předpisem $Sx = (\langle x, e_j \rangle)_{j \in J}$

Dle Besselovy nerovnosti je dále definováno, zřejmě je lineární,
dle VI.39 (iv) je to izometrie

② $S e_j(j) = 1, S e_j(k) = 0$ pro $k \neq j$. Z toho plyne že $S(H)$ obsahuje
všechny funkce, které mají nulu všude kromě jednoho bodu.
Tyto funkce tvoří hustou podmnožinu $\ell^2(J)$, $S(H)$ je tedy hustý.
Protože S je izometrie, je $S(H)$ úplný a tedy uzavřený. Proto je S na

③ Z věty I.39 (iv) plyne, že $T = S^{-1}$

Poznámky H separabilní prostor se skelárním součinem $\Rightarrow$ každý OVSystém je spčetný

$$\begin{aligned} \{e_j\}_{j \in J} \text{ OVSystém} &\Leftrightarrow \forall j \neq k: \|e_j - e_k\|^2 = \langle e_j - e_k, e_j - e_k \rangle = \underbrace{\langle e_j, e_j \rangle}_{=1} - \underbrace{\langle e_j, e_k \rangle}_{=0} - \underbrace{\langle e_k, e_j \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle e_k, e_k \rangle}_{=1} = 2 \end{aligned}$$

Tedy OVSystém je $\sqrt{2}$ -diskretní. Tedy v separabilním prostoru nemůže být nespočetný

Definicja I.42 H nieprzerwanie rozciągany separowalny Hilbertów przestrzeń
 $\Rightarrow H$ jest izometryczny ℓ^2

Dk: H ma ONB (Definicja I.40)
 ta baza musi być nieskończona (proste dla $H = \mathbb{R}$) a spójna (porównaj
 wyżej). Tę mamy ONB $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Nymisłaci-paździ
 Definicja I.41

Definicja I.43 H Hilbertów, $Y \subset H$ uzavly, $(e_j)_{j \in J}$ ONB Y
 Paż oś projekce H na Y ma wzór

$$P_x = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j$$

Dk: $x \in H \Rightarrow x - P_x \perp Y$, t.j. $\forall y \in Y: \langle x - P_x, y \rangle = 0$, natych $\langle x, y \rangle = \langle P_x, y \rangle$
 Prosto $P_x = \sum_{j \in J} \langle P_x, e_j \rangle e_j = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j$
 (I.39 (iv)) $e_j \in Y$

* alternatywnie: dzięki ciągłości (iv) $\Rightarrow$ (v) z Def. I.39:

Nech $x, y \in H$. Dłg (iv) vline

$$x = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j$$

Pro $F \subset J$ skończona poleżne $x_F = \sum_{j \in F} \langle x, e_j \rangle e_j$

$$\text{Paż } \langle x_F, y \rangle = \left\langle \sum_{j \in F} \langle x, e_j \rangle e_j, y \right\rangle = \sum_{j \in F} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, y \rangle = \sum_{j \in F} \langle x, e_j \rangle \overline{\langle y, e_j \rangle}$$

$$\text{Ukazujemy, że } \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle \overline{\langle y, e_j \rangle} = \langle x, y \rangle$$

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists F_0 \subset J$ skończona $\forall F \subset J$ skończona, $F \supset F_0$; $\|x_F - x\| < \varepsilon$

Nech $F \subset J$ skończona, $F \supset F_0$. Paż:

$$|\langle x, y \rangle - \sum_{j \in F} \langle x, e_j \rangle \overline{\langle y, e_j \rangle}| = |\langle x, y \rangle - \langle x_F, y \rangle| = |\langle x - x_F, y \rangle| \leq \|x - x_F\| \cdot \|y\| \leq \varepsilon \cdot \|y\|$$

Tym jest ok.