

I.5 Struktura Hilbertových prostorů

Příklad 33. Je-li Γ libovolná množina, pak prostor $\ell^2(\Gamma)$ je Hilbertův prostor, pokud ho opatříme skalárním součinem

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \overline{g(\gamma)}, \quad f, g \in \ell^2(\Gamma).$$

Věta 34 (nejbližší body v Hilbertových prostorech). Nechť H je Hilbertův prostor a $C \subset H$ neprázdná uzavřená konvexní množina. Pak pro každý bod $x \in H$ existuje právě jeden bod $y \in C$ nejbližší k x , tj. takový $y \in C$, že

$$\|x - y\| = \text{dist}(x, C) = \inf\{\|x - z\|; z \in C\}.$$

Tvrzení 35 (charakterizace nejbližšího bodu). Nechť H je Hilbertův prostor, $C \subset H$ neprázdná uzavřená konvexní množina a $x \in H$. Bod $y \in C$ je nejbližším bodem k x , právě když platí

$$\text{Re} \langle x - y, z - y \rangle \leq 0 \text{ pro každé } z \in C.$$

Speciálně, pokud C je uzavřený podprostor, pak $y \in C$ je nejbližším bodem k x , právě když platí

$$\langle x - y, z \rangle = 0 \text{ pro každé } z \in C.$$

Definice. Nechť H je reálný prostor se skalárním součinem a $x, y \in H$ dva nenulové prvky.

Úhlem mezi vektory x a y rozumíme takové $\alpha \in [0, \pi]$, pro které platí

$$\cos \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad \left(\text{tj. } \alpha = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \right).$$

Poznámka: Je-li H reálný, pak podmínka charakterizující nejbližší bod v Tvrzení 32 říká, že po každé $z \in C$ je úhel mezi vektory $x - y$ a $z - y$ (tj. úhel xyz) neostřý (tj. pravý nebo tupý).

Definice. Nechť H je prostor se skalárním součinem.

- Říkáme, že prvky $x, y \in H$ jsou **kolmé** (nebo **ortogonální**), pokud $\langle x, y \rangle = 0$. Tuto skutečnost zapisujeme $x \perp y$.
- Říkáme, že dvě podmnožiny $A, B \subset H$ jsou navzájem **kolmé** (nebo **ortogonální**), pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A$ a $y \in B$.
- Nechť $A \subset H$. **Ortogonálním doplňkem** množiny A rozumíme množinu

$$A^\perp = \{x \in H; x \perp y \text{ pro každé } y \in A\}.$$

Poznámka. $A^\perp$ je uzavřený podprostor H pro každou podmnožinu $A \subset H$.

Větička 36 (Pythagorova věta). Nechť H je prostor se skalárním součinem a $x, y \in H$ jsou dva kolmé prvky. Pak $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. (Je-li H reálný, platí i obrácení – jestliže $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, pak $x \perp y$.)

Věta 37 (ortogonální doplněk a ortogonální projekce). Nechť H je Hilbertův prostor a $Y \subset H$ je uzavřený podprostor. Pro každé $x \in H$ označme Px bod v Y nejbližší k x . Pak platí:

- (a) P je lineární projekce, $\|P\| \leq 1$, $P(H) = Y$, $\text{Ker } P = Y^\perp$.
- (b) $I - P$ je lineární projekce, $\|I - P\| \leq 1$, $(I - P)(H) = Y^\perp$, $\text{Ker}(I - P) = Y$.
- (c) Pro každé $x \in H$ je $(I - P)x$ bod v $Y^\perp$ nejbližší k x .
- (d) $(Y^\perp)^\perp = Y$.
- (e) Pro každé $x \in H$ existuje právě jedna dvojice prvků $y \in Y$ a $z \in Y^\perp$ splňující $x = y + z$.

Definice. Projekce P z Věty 37 se nazývá **ortogonální projekce na podprostor Y** .

Definice. Necht' H je prostor se skalárním součinem a $(e_j)_{j \in J}$ je indexovaný systém prvků H . Tento systém se nazývá

- **ortogonální**, pokud pro každé dva různé indexy $j, k \in J$ platí $e_j \perp e_k$;
- **ortonormální**, pokud je ortogonální a navíc pro každé $j \in J$ platí $\|e_j\| = 1$.

Poznámka. Je-li $(e_j)_{j \in J}$ ortogonální systém neobsahující nulový vektor, pak systém $(\frac{e_j}{\|e_j\|})_{j \in J}$ je ortonormální. Dále se budeme zabývat jen ortonormálními systémy, nicméně uvedená tvrzení lze s využitím zmíněného postřehu použít (patříčně upravená) i pro ortogonální systémy.

Věta 38 (Besselova nerovnost). Necht' H je prostor se skalárním součinem a $(e_j)_{j \in J}$ je ortonormální systém v H . Pak pro každé $x \in H$ platí

$$\sum_{j \in J} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Definice. Necht' H je prostor se skalárním součinem a $(e_j)_{j \in J}$ je ortonormální systém v H . Říkáme, že tento systém je

- **maximální ortonormální**, pokud k němu nelze přidat žádný prvek tak, aby systém zůstal ortonormální, tj. pokud $\{e_j; j \in J\}^\perp = \{0\}$;
- **úplný ortonormální**, pokud lineární obal množiny $\{e_j; j \in J\}$ je hustý v H ;
- **ortonormální báze**, pokud pro každé $x \in H$ existují koeficienty $(x_j)_{j \in J}$ v $\mathbb{F}$ takové, že

$$x = \sum_{j \in J} x_j e_j.$$

Poznámky. Každá ortonormální báze je úplný ortonormální systém. Každý úplný ortonormální systém je maximální. Kanonické jednotkové vektory tvoří ortonormální bázi prostoru $\ell^2(\Gamma)$.

Věta 39. Necht' H je Hilbertův prostor a $(e_j)_{j \in J}$ je ortonormální systém v H . Následující podmínky jsou ekvivalentní.

- $(e_j)_{j \in J}$ je maximální ortonormální systém.
- $(e_j)_{j \in J}$ je úplný ortonormální systém.
- $(e_j)_{j \in J}$ je ortonormální báze.
- Pro každé $x \in H$ platí $x = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j$.
- Pro každé $x, y \in H$ platí $\langle x, y \rangle = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle \overline{\langle y, e_j \rangle}$
- (Parsevalova rovnost) Pro každé $x \in H$ platí $\|x\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle x, e_j \rangle|^2$.

Důsledek 40. Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.

Důsledek 41 (Riesz-Fisherova věta). Necht' H je Hilbertův prostor a $(e_j)_{j \in J}$ nějaká ortonormální báze. Pak zobrazení $T : \ell^2(J) \rightarrow H$ definované předpisem

$$T(f) = \sum_{j \in J} f(j) e_j, \quad f \in \ell^2(J),$$

je izometrie prostoru $\ell^2(J)$ na H . Tedy, každý Hilbertův prostor je izometrický prostoru $\ell^2(J)$ pro nějakou množinu J .

Poznámka. V separabilním prostoru se skalárním součinem je každý ortonormální systém spočetný.

Důsledek 42 (Riesz-Fisherova věta pro separabilní prostory). Každý nekonečně-rozměrný separabilní Hilbertův prostor je izometrický prostoru ℓ^2 .

Důsledek 43 (vyjádření ortogonální projekce). Necht' H je Hilbertův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Necht' $(e_j)_{j \in J}$ nějaká ortonormální báze prostoru Y . Pak ortogonální projekci na Y lze vyjádřit vzorcem

$$Px = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j, \quad x \in H.$$