

Věta I.14  $X$  vekt. prost.,  $\dim X < \infty \Rightarrow$  všechny normy na  $X$  jsou ekvivalentní

Důk: •  $\dim X = 0 \Rightarrow X = \{0\}$ , jediná norma je nulová

•  $\dim X = n \in \mathbb{N}$  ... zvolíme  $x_1, \dots, x_n \in X$  bázi

Pak  $x_1, \dots, x_n \in X \setminus \{0\}$ , každé  $x \in X$  lze jednoznačně vyjádřit  
ve tvaru  $\sum_{j=1}^n d_j x_j$ , kde  $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{F}$

Definujeme  $\|\sum_{j=1}^n d_j x_j\|_1 := \sum_{j=1}^n |d_j|$  pro  $\sum_{j=1}^n d_j x_j \in X$

To je norma na  $X$

• Nechť  $\|\cdot\|$  je libovolná norma na  $X$ . Ukažme, že je ekvivalentní s  $\|\cdot\|_1$ :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \left\| \sum_{j=1}^n d_j x_j \right\| &\leq \sum_{j=1}^n |d_j| \|x_j\| \leq \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\} \cdot \sum_{j=1}^n |d_j| \\ &= \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\} \cdot \left\| \sum_{j=1}^n d_j x_j \right\|_1 \end{aligned}$$

$$\text{Tedy } \|\cdot\| \leq \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\} \cdot \|\cdot\|_1$$

② Obráceně:

Uvažme  $\phi: \mathbb{F}^n \rightarrow X$  definovanou vzorcem

$$\phi((d_j)_{j=1}^n) = \sum_{j=1}^n d_j x_j$$

Pak  $\phi$  je lineární, navíc

$$\|\phi((d_j)_{j=1}^n)\| = \left\| \sum_{j=1}^n d_j x_j \right\| \leq \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n |d_j|}_{= \|(d_j)_{j=1}^n\|_1}$$

Tedy  $\phi$  je spojitý z  $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_1)$  do  $(X, \|\cdot\|)$  (dle věty I.14)

Tedy zobrazení  $g: (d_j)_{j=1}^n \mapsto \|\phi((d_j)_{j=1}^n)\|$  je spojitý

(dle věty I.11)

$S = \left\{ (d_j)_{j=1}^n : \sum_{j=1}^n |d_j| = 1 \right\}$  je kompaktní podmnožina v  $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_1)$   
(je omezená a uzavřená)

Tedy  $g$  nabývá minima na  $S$ .

Protože  $g > 0$  na  $S$  (dvě lineární nezávislosti  $x_1, \dots, x_n$ ),  
je  $c$  minimum  $c := \min_{(d_j)_{j=1}^n \in S} g((d_j)_{j=1}^n) > 0$

$$\forall (d_j)_{j=1}^n \in S : \left\| \sum_{j=1}^n d_j x_j \right\| \geq c$$

Nechť  $x \in X$  libovolně. Pak  $x = \sum_{j=1}^n d_j x_j$ ,  $d_j$  nezávisle zvolíme

$$\text{Pak } \|x\| = \left\| \sum_{j=1}^n d_j x_j \right\| = \underbrace{\sum_{j=1}^n |d_j|}_{= \|x\|_1} \cdot \left\| \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{d_j}{\sum_{k=1}^n |d_k|}}_{\left( \frac{d_j}{\sum_{k=1}^n |d_k|} \right)_{j=1}^n \in S} x_j \right\| \geq \|x\|_1 \cdot c$$

A to je ono.

### Důsledek I.45 $X$ NLP konečné dimenze

(a)  $X$  je izomorfní prostoru  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ , kde  $n = \dim X$

z důvodu věty I.44 plyne, že  $X$  je izomorfní  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$   
- zobrazení  $\phi$  je izomorfní.

Převzato  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$  je izomorfní  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$  dle příkladu I.13

(b)  $X$  je úplný

$\mathbb{R}^n$  je úplný dle příkladu I.2(2), izomorfismus zachová úplnost  
dle věty I.17

(c)  $A \subset X$  je kompaktní  $\Leftrightarrow A$  je omezená a uzavřená

$\mathbb{R}^n$  je uzavřený a omezený  $\Leftrightarrow A$  je uzavřený a omezený

(d)  $Y$  NLP,  $T: X \rightarrow Y$  lineár  $\Rightarrow T$  je spojité

┌ BÚNO  $X = (\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_1)$  označme  $e_1, \dots, e_n$  kanonická bázis  $\mathbb{F}^n$

$$\text{Paž } \|T(d_1, \dots, d_n)\| = \|T(\sum_{j=1}^n d_j e_j)\| = \|\sum_{j=1}^n d_j T e_j\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^n |d_j| \|T e_j\| \leq \max\{\|T e_1\|, \dots, \|T e_n\|\} \cdot \|(d_j)_{j=1}^n\|_1 \quad \rfloor$$

(e) Každý lineární funkcionál  $f: X \rightarrow \mathbb{F}$  je spojité

┌ plyne z (d) pro  $Y = \mathbb{F}$  ┐

Důsledek I. 46  $X$  NLP,  $Y \subset \subset X$ ,  $\dim Y < \infty \Rightarrow Y$  uzavřen v  $X$

Důkaz: Dle Důsledku I. 45 (b) je  $Y$  nřh.

Dle Věty I. 4 je  $Y$  uzavřen v  $X$ .