I.6 Normované prostory konečné a nekonečné dimenze

Věta 44 (normy na konečněrozměrném prostoru). *Nechť X je vektorový prostor konečné dimenze. Pak každé dvě normy na X jsou ekvivalentní.*

Důsledek 45 (vlastnosti prostorů konečné dimenze). *Nechť X je normovaný lineární prostor konečné dimenze. Pak platí:*

(a) Prostor X je izomorfní prostoru $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2)$, kde $n = \dim X$.
(b) Prostor X je úplný.
(c) Podmnožina prostoru X je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.
(d) Je-li Y libovolný normovaný lineární prostor, pak každé lineární zobrazení $T : X \to Y$ je spojité.
(e) Každý lineární funkcionál $f : X \to \mathbb{F}$ je spojitý.

Důsledek 46. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y \subset\subset X$ je lineární podprostor konečné dimenze. Pak Y je uzavřený v X.*

Lemma 47 (Rieszovo lemma o skoro-kolmici). *Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y \subset X$ vlastní uzavřený podprostor. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in X$ takový, že $\|x\| = 1$ a $\operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.*

Věta 48 (kompaktnost jednotkové koule). *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak $\dim X < \infty$, právě když B_X je kompaktní.*

Tvrzení 49. *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nekonečné dimenze. Pak platí:*

(a) Existuje nespojitý lineární funkcionál $f : X \to \mathbb{F}$.
(b) Na X existuje norma, která není ekvivalentní $\|\cdot\|$.