

Dokaz Tvrm 53 | X end reálny VCP, X_C komplexifika a
vektorový priestor X

(a) Každé dve prípustné normy na X_C sa ekvivalujú

Ukážeme, že pro každú prípustnú normu $\|\cdot\|$ na X_C platí

$$\max\{\|x\|, \|y\|\} \leq \|(x, y)\| \leq 2 \max\{\|x\|, \|y\|\} :$$

$$\begin{aligned} \|(x, y)\| &\leq \|(x, 0)\| + \|(0, y)\| = \|x\| + \|\dot{c} \cdot (y, 0)\| = \\ &= \|x\| + \|(y, 0)\| = \|x\| + \|y\| \leq 2 \max\{\|x\|, \|y\|\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|(x, 0)\| = \left\| \frac{1}{2}((x, y) + (x, -y)) \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} (\|(x, y)\| + \|(x, -y)\|) = \|(x, y)\| \end{aligned}$$

$$\|y\| \leq \|(y, x)\| = \|\dot{c} \cdot (x, -y)\| = \|(x, -y)\| = \|(x, y)\|$$

$$\text{Toč: } \max\{\|x\|, \|y\|\} \leq \|(x, y)\|$$

(b) $\|\cdot\|_{\min}$ je prípustná norma a je zvrchol prípustnej normy
nejmenší.

• Nepotrebuje ukázať, že $\|\cdot\|_{\min}$ je norma na X_C v reálnom smysle:

$$\text{Predpokladáme, že } \|(x, y)\|_{\min} = \sup\{\|\alpha x + \beta y\|; \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \leq 1\}$$

Pro $(x, y) \in X \times X$ definujeme operátor $T_{x,y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow X$

$$\text{vzorec } T_{x,y}(\alpha, \beta) = \alpha x + \beta y$$

$$\text{Paž } T_{x,y} \in L((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2), X) \text{ a } \|T_{x,y}\| = \|(x, y)\|_{\min}$$

zobrazení $(x, y) \mapsto T_{x,y}$ je lineárne isomorfizmus $X \times X$ na $L(\mathbb{R}^2, X)$,

$\|\cdot\|_{\min}$ je teda norma.

• Dále ukážeme, že $\|\cdot\|_{\min}$ je norma i v komplexnom smysle.

$$\text{K tomu stačí ukázať, že } \|\lambda \cdot (x, y)\|_{\min} \leq |\lambda| \cdot \|(x, y)\|_{\min}$$

$$(\gamma + i\delta)(x, y) = (\gamma x - \delta y, \gamma y + \delta x)$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 \leq 1 &\Rightarrow \|\alpha(\gamma x - \delta y) + \beta(\gamma y + \delta x)\| = \|(\alpha\gamma + \beta\delta)x + (\beta\gamma - \alpha\delta)y\| \\ &\leq \sqrt{(\alpha\gamma + \beta\delta)^2 + (\beta\gamma - \alpha\delta)^2} \|(x, y)\|_{\min} = \sqrt{\alpha^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 + \alpha^2\delta^2} \|(x, y)\|_{\min} \\ &= \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} \|(x, y)\|_{\min} = |\gamma + i\delta| \cdot \|(x, y)\|_{\min} \end{aligned}$$

- Dato nizemo, $\| \cdot \|_{\min}$ je priprsta:

$$\| (x, 0) \|_{\min} = \sup_{\alpha^2 + \beta^2 \leq 1} \| \alpha x + \beta \cdot 0 \| = \sup_{|\alpha| \leq 1} |\alpha| \cdot \|x\| = \|x\|$$

$$\| (x, -y) \|_{\min} = \sup_{\alpha^2 + \beta^2 \leq 1} \| \alpha x - \beta y \| = \sup_{\alpha^2 + \beta^2 \leq 1} \| \alpha x + \beta (-y) \| = \| (x, y) \|_{\min}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 \leq 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + (-\beta)^2 \leq 1$$

- Načelno je priprsta, $\| \cdot \|$ je najmanjši:

$\| \cdot \|$ budi linearna priprsta norma, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 = 1$

$$\| (x, y) \| = \| (\alpha x + \beta y, \alpha y - \beta x) \| = \| (\alpha x + \beta y, \alpha y - \beta x) \|$$

$$\geq \| \alpha x + \beta y \| \quad (\text{viz. } \alpha^2 + \beta^2 = 1)$$

$$\Rightarrow \| (x, y) \| \geq \| (x, y) \|_{\min}$$

(c) X_C uprsta $\Rightarrow (x_C)_R$ uprsta, x je enoli podprostor $(x_C)_R$

- X uprsta $\Rightarrow (x, X, \| \cdot \|_{\infty})$, kjer $\| (x, y) \|_{\infty} = \max \{ \|x\|, \|y\| \}$ je uprsta, a to je enoli podprostor $(x_C)_R$, torej x_C je uprsta

(d) $X = C(K, \mathbb{R})$, $X = l_{\infty}(I, \mathbb{R})$, $X = C(I, \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \| (f, g) \|_X = \sup_{\alpha^2 + \beta^2 \leq 1} \| \alpha f + \beta g \|_X =$$

$$= \sup_{\alpha^2 + \beta^2 \leq 1} \sup_x | \alpha f(x) + \beta g(x) | = \sup_x \sup_{\alpha^2 + \beta^2 \leq 1} | \alpha f(x) + \beta g(x) |$$

$$= \sup_x \sup_{\alpha^2 + \beta^2 \leq 1} | \langle (f(x), g(x)), (\alpha, \beta) \rangle_{\mathbb{R}^2} | = \sup_x \sqrt{f(x)^2 + g(x)^2}$$

$$= \sup_x | f(x) + i g(x) | = \| f + i g \|_{\infty}$$