

X je reálny vektorový priestor, $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ sublineárna funkcia
 $Y \subset X$, $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ lineárna funkcia, $f \leq p$ na Y

Lemma 3 $x_0 \in X \setminus Y \Rightarrow \exists d \in \mathbb{R} : \forall y \in Y \forall t \in \mathbb{R} : f(y) + d \cdot t \leq p(y + t \cdot x_0)$

Dk: chceme $d \in \mathbb{R}$, aby $\forall y \in Y \forall t \in \mathbb{R} : d \cdot t \leq p(y + t \cdot x_0) - f(y)$
 pretože pre $t=0$ to platí automaticky
 $\sqrt{0 \leq p(y) - f(y)}$, pretože $f \leq p$ na Y
 stačí sa bôj omezit na $t \neq 0$

požadovaná podmienka je ekvivalentná tomu to:

$$\forall y \in Y \forall t > 0 \quad d \cdot t \leq p(y + t \cdot x_0) - f(y) \quad \& \quad -d \cdot t \leq p(y - t \cdot x_0) - f(y)$$

$$\Updownarrow \quad d \leq \frac{p(y + t \cdot x_0) - f(y)}{t} \quad \quad d \geq \frac{f(y) - p(y - t \cdot x_0)}{t}$$

To je ekvivalentné:

$$d \leq \inf \left\{ \frac{p(y + t \cdot x_0) - f(y)}{t} : y \in Y, t > 0 \right\}$$

$$\& \quad d \geq \sup \left\{ \frac{f(y) - p(y - t \cdot x_0)}{t} : y \in Y, t > 0 \right\}$$

Existencia takého d je ekvivalentná tomu, že $\sup \{ \dots \} \leq \inf \{ \dots \}$

Teda tomu, že

$$\forall y_1, y_2 \in Y \quad \forall t_1, t_2 > 0 : \underbrace{\frac{f(y_1) - p(y_1 - t_1 \cdot x_0)}{t_1}}_{\leq} \leq \underbrace{\frac{p(y_2 + t_2 \cdot x_0) - f(y_2)}{t_2}}_{\geq}$$

$$\underbrace{t_2 f(y_1) + t_1 f(y_2)}_{f(t_2 y_1 + t_1 y_2)} \leq \underbrace{t_1 p(y_2 + t_2 \cdot x_0) + t_2 p(y_1 - t_1 \cdot x_0)}_{p(t_1 y_2 + t_2 y_1)}$$

To ovšem platí, pretože

$$f(t_2 y_1 + t_1 y_2) \leq p(t_2 y_1 + t_1 y_2) \leq p(t_2 y_1 - t_1 \cdot x_0) + p(t_1 y_2 + t_1 \cdot x_0)$$

$\uparrow$ $t_2 y_1 + t_1 y_2 \in Y$ $\uparrow$ p sublineárna

Tím je důkaz hotov.

Věta 2 $\exists g: X \rightarrow \mathbb{R}$ lineární, $g|_Y = f$, $g \leq p$ na Y

Dk: Použijeme Zornovu lemmu:

$$\mathcal{A} = \{(z, h); z \subset X, h: z \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineární}, h \leq p \text{ na } z\}$$

Na $\mathcal{A}$ definujeme částečné uspořádání takto:

$$(z_1, h_1) \leq (z_2, h_2) \stackrel{\text{def}}{=} z_1 \subset z_2 \text{ a } h_2|_{z_1} = h_1$$

Γ ztýmto $\leq$ je $\mathcal{A}$ poset částečné uspořádání

$\mathcal{A} \neq \emptyset$, protože obsahuje $(\{0\}, 0)$ (a také (Y, f))

Ověříme předpoklad Zornovy lemmatu:

$\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ buď řetězec. Ukážeme, že má horní zavoru:

$\Gamma \mathcal{R} \neq \emptyset \dots (\{0\}, 0)$ je horní zavorou z kruha hřích chování

$$\mathcal{R} \neq \emptyset \dots E = \bigcup \{z; \exists h: (z, h) \in \mathcal{R}\}$$

Pak $E \subset X$

$$\Gamma, 0 \in E: \exists (z, h) \in \mathcal{R}. \text{ Pak } 0 \in z \subset E$$

$$\bullet x, y \in E \Rightarrow \exists (z_1, h_1), (z_2, h_2) \in \mathcal{R} \text{ s } x \in z_1, y \in z_2$$

$$\mathcal{R} \text{ řetězec} \Rightarrow z_1 \subset z_2 \text{ nebo } z_2 \subset z_1$$

$$\text{Pokud } z_1 \subset z_2, \text{ pak } x, y \in z_2 \Rightarrow x, y \in z_2 \subset E$$

$$\text{Pokud } z_2 \subset z_1, \text{ pak } x, y \in z_1 \Rightarrow x, y \in z_1 \subset E$$

$$\bullet \lambda \in \mathbb{R}, x \in E \Rightarrow \exists (z, h) \in \mathcal{R}: x \in z.$$

$$\text{Pak } \lambda x \in z \subset E \quad \Downarrow$$

Definujeme $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ takto:

$$x \in E \dots \text{ex. } (z, h) \in \mathcal{R}, \text{ že } x \in z. \text{ Položíme } g(x) := h(x)$$

Pak g dobře definované

$$\Gamma (z_1, h_1), (z_2, h_2) \in \mathcal{R}, \text{ že } x \in z_1 \cup x \in z_2.$$

$$\mathcal{R} \text{ řetězec} \Rightarrow (z_1, h_1) \leq (z_2, h_2) \text{ nebo } (z_2, h_2) \leq (z_1, h_1)$$

$$\text{Buďto } (z_1, h_1) \leq (z_2, h_2) \text{ (nebo přesněji)}$$

$$\text{Pak } z_1 \subset z_2 \text{ a } h_2|_{z_1} = h_1 = \text{speciálně}$$

$$h_2(x) = h_1(x), \text{ protože } x \in z_1 \quad \Downarrow$$

Dato, g je lineár

$$\Gamma_{x,y \in E} \Rightarrow \exists (z_1, h_1), (z_2, h_2) \in \mathcal{R} : x \in z_1, y \in z_2$$

Opet $z_1 \subset z_2$ alebo $z_2 \subset z_1$.

Pokiald $z_1 \subset z_2$, pät $x, y \in z_2$ a pät $x+y \in z_2$, leg

$$g(x+y) = h_2(x+y) = h_2(x) + h_2(y) = g(x) + g(y)$$

$\nwarrow$
 h_2 lineár

$$\lambda \in \mathbb{R}, x \in E \Rightarrow \exists (z, h) \in \mathcal{R} : x \in z. \text{ Pät } \lambda x \in z, \text{ leg}$$

$$g(\lambda x) = h(\lambda x) = \lambda h(x) = \lambda g(x) \quad \square$$

Namc $g \leq p \in E$

$$\Gamma_{x \in E} \Rightarrow \exists (z, h) \in \mathcal{R} : x \in z. \text{ Pät } g(x) = h(x) \leq p(x) \quad \square$$

Ted $(E, g) \in \mathcal{A}$

Záverom (E, g) hori zánova pö $\mathcal{R}$ $\Gamma_{(z, h) \in \mathcal{R}} \dots$ dle definie
 $z \subset E$ a $g|_z = h \quad \square$

Ted máme overeny predpoklad Zornova lemmatu.

To nám dá, že existuje $(z, g) \in \mathcal{A}$ maximálny splývajúci $(\forall f) \leq (z, g)$.

Nyní stačí ukázať, že $z = X$ (potom g je lineár; $g \leq p \in E$ a $g|_X = f$)

Nechť $x_0 \in X \setminus z$. Použijeme Lemma 3 a dostaneme $d \in \mathbb{R}$, že

$$\forall y \in z \forall t \in \mathbb{R} : g(y) + td \leq p(y + tx_0).$$

Položíme $z' := \text{span}(z \cup \{x_0\})$

$$\text{a pö } y \in z, t \in \mathbb{R} \text{ definuje } h(y + tx_0) = g(y) + td$$

Pät h je lineár, $h \leq p|_{z'}$, $h|_z = g$

Ted $(z', h) \in \mathcal{A}$, $(z, g) \not\leq (z', h)$,

čo je spor s maximalitou (z, g) .

To dokončuje dôkaz lematu

Věta 4 X normovaný prostor nad $\mathbb{F}$, $f: X \rightarrow \mathbb{F}$ lineární, p pseudonorma na X
 Pak $\operatorname{Re} f \leq p$ na X , pak $|f| \leq p$ na X

Důk: ① $\mathbb{F} = \mathbb{R}$: $x \in X \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq p(x) \\ -f(x) = f(-x) \leq p(-x) = p(x) \end{cases} \Rightarrow |f(x)| \leq p(x)$

② $\mathbb{F} = \mathbb{C}$: $x \in X \Rightarrow \exists d \in \mathbb{C}, |d|=1: |f(x)| = d f(x)$.

$$\text{Pak } |f(x)| = d f(x) = f(dx) = \operatorname{Re} f(dx) \leq p(dx) = p(x)$$

$\uparrow$ lineární $\uparrow$ $f(dx) = |d| \geq 0$ $\uparrow$ pseudonorma

Lemma 5: X normovaný prostor nad $\mathbb{F}$, p pseudonorma na X , $Y \subset X$
 $f: Y \rightarrow \mathbb{F}$ lineární, $|f| \leq p$ na Y
 $\Rightarrow \exists g: X \rightarrow \mathbb{F}$ lineární, $g|_Y = f$, $|g| \leq p$ na X

Důk: ① $\mathbb{F} = \mathbb{C}$: $X_{\mathbb{R}} :=$ reálná verze X ... normovaný prostor nad $\mathbb{R}$
 Pak $\operatorname{Re} f$ je lineární funkce na Y , můžeme ji prodloužit na $X_{\mathbb{R}}$
 Nalezneme $\operatorname{Re} f \leq |f| \leq p$ na Y . Protože p je sublineární,
 dle 4.2 existuje $g_0: X_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ lineární, $g_0|_Y = \operatorname{Re} f$, $g_0 \leq p$ na $X_{\mathbb{R}}$

Definujeme $g: X \rightarrow \mathbb{C}$ předpisem $g(x) = g_0(x) - i g_0(ix)$.

Pak g je lineární (viz důkaz T.I. 5.0 (a)), $g|_Y = f$
 a $\operatorname{Re} g \leq p$ na X . Dle 4.4 dostaneme $|g| \leq p$ na X

② $\mathbb{F} = \mathbb{R}$: $|f| \leq p$ na $Y \Rightarrow f \leq p$ na $Y \xrightarrow{\text{v2}} \exists g: X \rightarrow \mathbb{R}$ lineární $g|_Y = f$,
 $g \leq p$ na X
 $\hookrightarrow$ v4
 $|g| \leq p$ na X