

Nechť X je Banachov prostor

(a) X je reflexivní $\Leftrightarrow X^*$ je reflexivní

Důkaz: $\Rightarrow$: Nechť X je reflexivní. Nechť $\Phi \in X^{***}$ je libovolné

Definujeme $\varphi := \Phi \circ \mathcal{R}_X$, tj. $\varphi(x) = \Phi(\mathcal{R}_X(x))$, $x \in X$.

Paž $\varphi \in X^*$. Tedy, $\Phi = \mathcal{R}_{X^*}(\varphi)$

$\Gamma F \in X^{**} \Rightarrow \exists x \in X$, že $F = \mathcal{R}_X(x)$. (protože X je reflexivní)

$$\begin{aligned} \text{Paž } \mathcal{R}_{X^*}(\varphi)(F) &= F(\varphi) = \mathcal{R}_X(x)(\varphi) = \varphi(x) \\ &= \Phi(\mathcal{R}_X(x)) = \Phi(F). \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Nechť X^* je reflexivní. Ukažeme, že $\mathcal{R}_X(X)$ je husto v X^{**} . z úplnosti X paž plyne $\mathcal{R}_X(X) = X^{**}$.

Hustotu ukažeme pomocí Důsledku II.9, tj.

důkazem implikace $\Phi \in X^{***}$, $\Phi|_{\mathcal{R}_X(X)} = 0 \Rightarrow \Phi = 0$

Γ Nechť $\Phi \in X^{***}$, $\Phi|_{\mathcal{R}_X(X)} = 0$.

Protože X^* je reflexivní, existuje $\varphi \in X^*$, že $\mathcal{R}_{X^*}(\varphi) = \Phi$

Pro každé $x \in X$ platí:

$$0 = \Phi(\mathcal{R}_X(x)) = \mathcal{R}_{X^*}(\varphi)(\mathcal{R}_X(x)) = \mathcal{R}_X(x)(\varphi) = \varphi(x),$$

$$\text{tj. } \varphi = 0, \text{ tedy } \Phi = \mathcal{R}_{X^*}(\varphi) = \mathcal{R}_{X^*}(0) = 0$$

(b) X je reflexivní, $Y \subset X$ uzavřen $\Rightarrow Y$ reflexivní

Důkaz: $F \in Y^{**}$ bud libovolné

Definujeme $\tilde{F}(\varphi) = F(\varphi|_Y)$, $\varphi \in X^*$

Paž $\tilde{F} \in X^{**}$ ($\|\tilde{F}\| \leq \|F\|$). Protože

X je reflexivní, existuje $x \in X$, že $\tilde{F} = \mathcal{R}_X(x)$.

Paž \$x \in Y\$. \$\Gamma_K\$ dýž mo, z H-B včty plyne, že existuje
 $\varphi \in X^*$, že \$\varphi(x) = 1\$ a \$\varphi|_Y = 0\$. Paž ovšem
 $1 = \varphi(x) = \mathcal{R}_x(x)(\varphi) = \hat{F}(\varphi) = F(\varphi|_Y) = F(0) = 0$,
 správně$

Námel \$F = \mathcal{R}_Y(x)\$: Necht \$\varphi \in Y^*\$ libovolně,
 z H-B včty plyne, že existuje \$\tilde{\varphi} \in X^*\$, že \$\tilde{\varphi}|_Y = \varphi\$

Paž \$F(\varphi) = F(\tilde{\varphi}|_Y) = \tilde{F}(\tilde{\varphi}) = \mathcal{R}_x(x)(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)\$
 . Opravdu tedy \$F = \mathcal{R}_Y(x) \in \mathcal{R}_Y(Y)\$. Tedy reflexivita \$Y\$.
 cc) \$X\$ reflexivní, \$Y\$ izomorfna \$X \Rightarrow Y\$ reflexivní

Důkaz: Necht \$T: X \rightarrow Y\$ je izomorfismus na.

\$\Psi \in Y^{**} \Rightarrow\$ definujeme \$\Phi(f) = \Psi(f \circ T^{-1})\$, \$f \in X^*\$

Paž \$\Phi \in X^{**}\$. Protože \$X\$ je reflexivní, existuje \$x \in X\$,

že \$\mathcal{R}_X(x) = \Phi\$. Tvrzení, že paž \$\Psi = \mathcal{R}_Y(Tx)\$

\$\Gamma g \in Y^* \Rightarrow\$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_Y(Tx)(g) &= g(Tx) = (g \circ T)(x) = \mathcal{R}_X(x)(g \circ T) \\ &= \Phi(g \circ T) = \Psi(g). \quad \perp \end{aligned}$$