Appendix 2: Něco málo z teorie míry

A2.1 Nezáporná míra, abstraktní Lebesgueův integrál

Nechť Ω je nějaká množina a Σ je nějaký systém podmnožin Ω. Σ je **σ-algebra**, pokud platí

(a) $\emptyset \in \Sigma$;
(b) $A \in \Sigma \Rightarrow \Omega \setminus A \in \Sigma$;
(c) je-li (A_n) posloupnost prvků Σ, pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

Nechť Ω je nějaká množina a Σ nějaká σ-algebra podmnožin Ω. Pak dvojici (Ω, Σ) říkáme **měřitelný prostor**. **Mírou** na (Ω, Σ) rozumíme každou funkci $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ splňující podmínky:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;
(b) je-li (A_n) posloupnost po dvou disjunktních prvků Σ, pak $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Míra μ se nazývá

- **konečná**, pokud $\mu(\Omega) < \infty$;
- **σ-konečná**, pokud existuje posloupnost (A_n) prvků Σ taková, že $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ a $\mu(A_n) < \infty$ pro každé n;
- **úplná**, pokud pro každou $A \in \Sigma$ splňující $\mu(A) = 0$ je každá její podmnožina měřitelná (tj. patří do Σ).

Není-li μ úplná, dá se zúplnit. Její zúplnění je míra $\widetilde{\mu}$ definovaná na σ-algebře $\widetilde{\Sigma}$, kde

$$\widetilde{\Sigma} = \{A \subset \Omega; \exists B, C \in \Sigma : B \subset A \subset C \ \&\ \mu(C \setminus B) = 0\}$$

a $\widetilde{\mu}(A) = \mu(B) (= \mu(C))$, kde B, C jsou jako výše.

Funkce $f : \Omega \to \mathbb{F}$ se nazývá

- **měřitelná**, pokud $f^{-1}(U) \in \Sigma$ pro každou U otevřenou;
- **jednoduchá**, nabývá-li jen konečně mnoha hodnot;
- **μ-měřitelná**, pokud $f^{-1}(U) \in \widetilde{\Sigma}$ pro každou U otevřenou.

Nechť $f : \Omega \to \mathbb{F}$ je měřitelná. Její integrál podle μ se definuje postupně takto:

- Je-li f jednoduchá a nezáporná, pak f lze napsat ve tvaru $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}$, kde $c_j \geq 0$ a $A_j \in \Sigma$ jsou po dvou disjunktní množiny. Pak definujeme

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j),$$

  přičemž používáme konvenci $0 \cdot (+\infty) = 0$.
- Je-li f nezáporná, definujeme

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \sup\{\int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu; 0 \leq s \leq f, s \text{ jednoduchá měřitelná}\}.$$

  Hodnota tohoto integrálu může být cokoli z intervalu $[0, \infty]$.
- Je-li f reálná, definujeme

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu,$$

  pokud rozdíl má smysl. Hodnota může být cokoli z intervalu $[-\infty, \infty]$, smysl nemá rozdíl $\infty - \infty$. Pokud integrál existuje a jeho hodnota je reálné číslo, f se nazývá **integrovatelná**.
- Je-li f komplexní, definujeme

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \operatorname{Re} f \,\mathrm{d}\mu + i \int_\Omega \operatorname{Im} f \,\mathrm{d}\mu,$$

  pokud oba integrály vpravo jsou konečné.

Poznámka: Je-li f μ-měřitelná, pak integrálem $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ rozumíme integrál $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\widetilde{\mu}$. Pro takovou f také existuje měřitelná g, která je rovna f $\widetilde{\mu}$-skoro všude.

A2.2 Komplexní a znaménkové míry

Nechť (Ω, Σ) je měřitelný prostor. $\mathbb{F}$-**hodnotovou mírou** rozumíme funkci $\mu : \Sigma \to \mathbb{F}$ splňující podmínky (a) a (b) z definice nezáporné míry. $\mathbb{R}$-hodnotové míře říkáme **znaménková míra**, $\mathbb{C}$-hodnotové míře říkáme **komplexní míra**. (U znaménkových měr se někdy připouští i nekonečné hodnoty, ale v Úvodu do funkcionální analýzy tento případ nebudeme uvažovat.)

- Je-li μ komplexní míra, jsou $\operatorname{Re}\mu$ a $\operatorname{Im}\mu$ znaménkové míry.
- Je-li μ znaménková míra, existuje její jednoznačný Hahnův rozklad, tj. dvě konečné nezáporné míry μ^+ a μ^-, které jsou vzájemně ortogonální (tj. existuje $A \in \Sigma$ taková, že $\mu^+(A) = 0$ a $\mu^-(\Omega \setminus A) = 0$) a pro které platí $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Součet těchto měr $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ se nazývá **absolutní variace** μ. Zmíněné míry lze vyjádřit vzorci

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(B); B \in \Sigma, B \subset A\},$$
$$\mu^-(A) = -\inf\{\mu(B); B \in \Sigma, B \subset A\},$$
$$|\mu|(A) = \sup\{\sum_{j=1}^{n} |\mu(B_j)| : B_1, \dots, B_n \in \Sigma \text{ a jsou to po dvou disjunktní podmnožiny } A\}.$$

- Je-li μ komplexní míra, její **absolutní variace** $|\mu|$ lze definovat stejným vzorcem jako výše a je to konečná nezáporná míra.

Integrál z měřitelné funkce f podle $\mathbb{F}$-hodnotové míry se definuje takto:

- Je-li μ znaménková, pak $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu^+ - \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu^-$, má-li výraz vpravo smysl.
- Je-li μ komplexní, pak $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\operatorname{Re}\mu + i\int_\Omega f \,\mathrm{d}\operatorname{Im}\mu$, má-li výraz vpravo smysl.

Základní odhad pro integrál: Nechť μ je $\mathbb{F}$-hodnotová míra a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je měřitelná funkce, pro kterou integrál $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ existuje. Pak

$$\left|\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu\right| \le \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}|\mu|.$$

A2.3 Regulární míry na metrických prostorech

Nechť (M, d) je metrický prostor. Označme symbolem $\mathcal{B}$ **borelovskou σ-algebru**, tj. nejmenší σ-algebru podmnožin M obsahující otevřené množiny. **Borelovskou mírou** na M rozumíme míru na $(M, \mathcal{B})$.

- Nezáporná borelovská míra μ na M se nazývá **regulární**, pokud pro každou $A \in \mathcal{B}$ platí

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U); U \supset A \text{ otevřená}\} = \sup\{\mu(F); F \subset A \text{ uzavřená}\}$$

- Je-li μ navíc konečná, stačí ověřovat jen jednu z rovností, druhá plyne snadno pomocí přechodu k doplňkům.
- $\mathbb{F}$-hodnotová borelovská míra na μ se nazývá **regulární**, je-li $|\mu|$ regulární.
- Jelikož $\mathbb{F}$-hodnotové míry jsou automaticky konečné, je taková míra regulární, právě když platí

$$\forall A \in \mathcal{B}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists F, G \subset M,\ G \text{ otevřená}, F \text{ uzavřená},$$
$$F \subset A \subset G, |\mu|\,(G \setminus F) < \varepsilon.$$

Jiný přístup: Někdy se borelovskou mírou rozumí míra definovaná na nějaké σ-algebře $\Sigma \supset \mathcal{B}$. Regulární mírou se pak rozumí míra definovaná na $\Sigma \supset \mathcal{B}$, která splňuje výše uvedenou definici, v níž se $\mathcal{B}$ nahradí Σ. Tento přístup je však ekvivalentní výše uvedenému, protože platí následující tvrzení:

Nechť μ je míra definovaná na nějaké σ-algebře $\Sigma \supset \mathcal{B}$. Označme μ_B zúžení μ na σ-algebru $\mathcal{B}$. Nechť $\widetilde{\mu_B}$ je zúplnění μ_B, příslušná σ-algebra nechť je $\widetilde{\mathcal{B}}$. Pak následující dvě podmínku jsou ekvivalentní:

(a) *μ je regulární.*

(b) *μ_B je regulární, $\Sigma \subset \widetilde{\mathcal{B}}$ a $\mu = \widetilde{\mu_B}$ na Σ.*

Proto μ-měřitelné funkce splývají s μ_B-měřitelnými a je jedno, zda integrujeme podle μ nebo podle μ_B.

A2.4 Radon-Nikodýmova věta

Nechť μ je nezáporná σ-konečná míra na (Ω, Σ). Nechť ν je $\mathbb{F}$-hodnotová míra na (Ω, Σ), která je **absolutně spojitá** vzhledem k μ, tj.

$$\forall A \in \Sigma : \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

Pak existuje μ-integrovatelná funkce $f : \Omega \to \mathbb{F}$ taková, že pro každou $A \in \Sigma$ platí

$$\nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu.$$

Pak pro každou $g : \Omega \to \mathbb{F}$ měřitelnou platí

$$\int_\Omega g \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega gf \,\mathrm{d}\mu,$$

pokud aspoň jeden z integrálů má smysl (tj. je roven nějakému komplexnímu číslu).

Speciální případ: Nechť μ je $\mathbb{F}$-hodnotová míra na (Ω, Σ). Pak μ je absolutně spojitá vůči $|\mu|$. Existuje tedy $|\mu|$-integrovatelná funkce $f : \Omega \to \mathbb{F}$ taková, že pro každou $A \in \Sigma$ platí

$$\mu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\,|\mu|\,.$$

Navíc platí $|f| = 1$ $|\mu|$-skoro všude.

Je-li μ znaménková, lze funkci f dostat z Hahnova rozkladu: Je-li $\mu = \mu^+ - \mu^-$ a $B \in \Sigma$ je taková, že $\mu^+(B) = 0$ a $\mu^-(\Omega \setminus B) = 0$, lze zvolit

$$f = \chi_{\Omega \setminus B} - \chi_B.$$