I.1 Těleso komplexních čísel

Definice. **Množinou komplexních čísel** rozumíme množinu $\mathbb{R}^2$ (tj. množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel) s následujícími operacemi:

- sčítání a násobení reálným číslem (definovanými stejně jako v $\mathbb{R}^2$);
- násobení definované vzorcem

$$(x, y) \cdot (a, b) = (xa - yb, xb + ya), \qquad (x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Množinu komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$.

Základní vlastnosti $\mathbb{C}$.

(i) *Množina $\mathbb{C}$ s operacemi sčítání a násobení tvoří komutativní těleso, nulovým prvkem je $(0, 0)$, jednotkovým prvkem je $(1, 0)$. Inverzním prvkem k nenulovému prvku (x, y) je prvek $(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$.*

(ii) *Zobrazení množiny $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$ definované předpisem $x \mapsto (x, 0)$ je tělesový izomorfismus $\mathbb{R}$ na $\{(x, y) \in \mathbb{C} : y = 0\}$. Tudíž $\mathbb{R}$ budeme uvažovat jako podtěleso $\mathbb{C}$.*

(iii) *Na $\mathbb{C}$ není definováno uspořádání. Na $\mathbb{C}$ ani nelze definovat uspořádání tak, aby bylo uspořádaným tělesem.*

Proč právě $\mathbb{R}^2$?

- V $\mathbb{R}$ není řešitelná rovnice $x^2 + 1 = 0$, v $\mathbb{C}$ má každý polynom stupně alespoň 1 alespoň jeden kořen. (Dokážeme později.)
- Pro $n > 2$ lze na $\mathbb{R}^n$ definovat „rozumné“ násobení jen pro $n = 4$ (tzv. kvaterniony, které tvoří nekomutativní těleso) a pro $n = 8$ (tzv. oktoniony nebo Cayleyho čísla, pro ně už násobení není ani asociativní).

Zápisy komplexního čísla

(i) Označme $i = (0, 1)$. Pak $i^2 = (-1, 0)$ a číslo i nazýváme **imaginární jednotkou**.

(ii) **Algebraický zápis komplexního čísla:** $(x, y) = x + iy$. Přitom zkracujeme zápis $x + i0 = x$ a $0 + iy = iy$.

(iii) **Maticový zápis komplexního čísla:**

$$(x, y) = x + iy = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Potom násobení komplexních čísel odpovídá násobení matic.

Definice. Nechť $z = (x,y) = x + iy = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Pak definujeme:

- $\operatorname{Re} z = x$ (**reálná část** komplexního čísla z);
- $\operatorname{Im} z = y$ (**imaginární část** komplexního čísla z);
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}}$ (**absolutní hodnota** komplexního čísla z);
- $\overline{z} = x - iy$ (**komplexně sdružené číslo** ke komplexnímu číslu z).

Pro každá $z, w \in \mathbb{C}$ platí:

(1) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;

(2) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$;

(3) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;

(4) $|\operatorname{Re} z| \le |z|$, $|\operatorname{Im} z| \le |z|$;

(5) $|\overline{z}| = |z|$.

$\mathbb{C}$ jako metrický prostor:

Při ztotožnění $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R}^2$ je $|z|$ rovno eukleidovské normě z. Vzorec $d(z,w) = |z - w|$ definuje tedy **metriku** na $\mathbb{C}$. Tudíž víme například, co je to **okolí bodu $U(a,r)$**, **otevřená množina**, **uzavřená množina**, **konvergence posloupnosti** v $\mathbb{C}$, **spojitost a limita zobrazení** z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$, z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{R}$ i z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$.

Poznámka: Funkce $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $z \mapsto \operatorname{Im} z$, $z \mapsto \overline{z}$ a $z \mapsto |z|$ jsou spojité na $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$ jako vektorový prostor

(1) $\mathbb{C}$ je vektorový prostor dimenze 2 nad $\mathbb{R}$. V tomto případě lineární zobrazení $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$ mají tvar

$$(x,y) \mapsto (x,y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ jsou libovolná.

(2) $\mathbb{C}$ je vektorový prostor dimenze 1 nad $\mathbb{C}$. V tomto případě mají lineární zobrazení $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$ tvar

$$z \mapsto z \cdot w,$$

kde $w \in \mathbb{C}$ je libovolné; při identifikaci $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R}^2$ je to tvar

$$(x,y) \mapsto (x,y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou libovolná.

I.2 Komplexní funkce reálné proměnné

Definice.

(1) **Komplexní funkcí reálné proměnné** rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{R}$.

(2) Nechť $f : M \to \mathbb{C}$ je zobrazení. Pak definujeme funkce $\operatorname{Re} f : M \to \mathbb{R}$ a $\operatorname{Im} f : M \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\operatorname{Re} f : x \mapsto \operatorname{Re}(f(x)), \quad x \in M,$$
$$\operatorname{Im} f : x \mapsto \operatorname{Im}(f(x)), \quad x \in M.$$

(3) Nechť f je komplexní funkce reálné proměnné a $x \in \mathbb{R}$. **Derivací funkce f v bodě x** rozumíme číslo

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

pokud tato limita existuje (v $\mathbb{C}$).

(4) Funkce $F : (a, b) \to \mathbb{C}$ je **primitivní funkce k f na (a, b)**, jestliže $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$.

Větička 1. *Nechť $f : M \to \mathbb{C}$ je komplexní funkce reálné proměnné, $a \in \mathbb{R}$ a $z \in \mathbb{C}$. Pak platí*

(1) $\lim_{x \to a+} f(x) = z$, *právě když*

$$\lim_{x \to a+} \operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} z \text{ a } \lim_{x \to a+} \operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im} z.$$

Podobně pro limity zleva a oboustranné.

(2) *f je spojitá (zleva, zprava) v bodě a, právě když obě funkce* $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ *jsou spojité (zleva, zprava) v bodě a.*

(3) *$f'(x)$ existuje, právě když existují vlastní derivace* $(\operatorname{Re} f)'(x)$ a $(\operatorname{Im} f)'(x)$. *Pak* $f'(x) = (\operatorname{Re} f)'(x) + i(\operatorname{Im} f)'(x)$.

(4) *Funkce $F : (a, b) \to \mathbb{C}$ je primitivní funkce k f na (a, b), právě když* $\operatorname{Re} F$ *je primitivní funkcí k* $\operatorname{Re} f$ *na (a, b) a* $\operatorname{Im} F$ *je primitivní funkcí k* $\operatorname{Im} f$ *na (a, b).*

Definice. Nechť f je komplexní funkce reálné proměnné. **Integrál (Riemannův, Newtonův) z funkce f od a do b** definujeme jako číslo

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \operatorname{Re} f + i \int_a^b \operatorname{Im} f,$$

pokud oba integrály na pravé straně existují.

Větička 2. *Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak platí*

$$\left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f| \le (b - a) \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

I.3 Komplexní funkce komplexní proměnné

Definice.

(1) **Komplexní funkcí komplexní proměnné** rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{C}$.

(2) Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné a $a \in \mathbb{C}$. **Derivací funkce** f **podle komplexní proměnné v bodě** a (stručněji **derivací funkce** f **v bodě** a rozumíme (komplexní) číslo

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

pokud limita na pravé straně existuje (v $\mathbb{C}$).

Poznámky. (i) Pro derivaci podle komplexní proměnné platí věty o derivaci součtu, součinu, podílu a složené funkce ve stejné podobě jako pro derivaci v $\mathbb{R}$.

(ii) Má-li f v bodě $a \in \mathbb{C}$ derivaci podle komplexní proměnné, je v bodě a spojitá.

(iii) Je-li f komplexní funkce komplexní proměnné, g komplexní funkce reálné proměnné a $x \in \mathbb{R}$, pak

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

pokud obě derivace na pravé straně existují.

Věta 3. *Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné. Označme $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ funkci dvou reálných proměnných s hodnotami v $\mathbb{R}^2$ odpovídající f při ztotožnění $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$; tj. takovou, že*

$$f(x + iy) = \tilde{f}_1(x, y) + i\tilde{f}_2(x, y)$$

pro $x + iy$ z definičního oboru f.

(a) (**Cauchy-Riemannovy podmínky**) *Nechť $z = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pak f má v bodě z derivaci podle komplexní proměnné, právě když $\tilde{f}$ má v bodě (a, b) totální diferenciál a platí $\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y}(a, b)$ a $\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y}(a, b) = -\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x}(a, b)$.*

(b) *Existuje-li $f'(z)$, je Jacobiho determinant $\tilde{f}$ v bodě (a, b) roven $|f'(z)|^2$. Speciálně, Jakobiho matice $\tilde{f}$ v bodě (a, b) je regulární, právě když $f'(z) \neq 0$.*

Poznámka: Je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená konvexní množina a $f : G \to \mathbb{C}$ splňuje $f'(z) = 0$ pro všechna $z \in G$, je f konstantní na G.

Definice.

- Nechť $M \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že funkce f je **holomorfní na množině** M, jestliže existuje otevřená množina $G \supset M$ taková, že f má derivaci (podle komplexní proměnné) v každém bodě množiny G.
- Funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ se nazývá **celá funkce**.