V.2 Laplaceova transformace – inverzní formule

Věta 5 (prostota Laplaceovy transformace). *Nechť $f \in L_1^+$. Existuje-li takové $c > c_f$, že $\mathcal{L}f$ je nulová na polorovině $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > c\}$, pak $f = 0$ skoro všude na $[0, +\infty)$.*

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a F je funkce holomorfní na polorovině $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > c\}$, pro kterou platí $\lim\limits_{\substack{p \to +\infty \\ \operatorname{Re} p \geq c}} F(p) = 0$. Zvolme libovolně $\xi > c$ a pro $t \in \mathbb{R}$ položme

$$\mathcal{L}_{-1}(F)(t) = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{[\xi - iy, \xi + iy]} F(p) e^{pt} \, \mathrm{d}p,$$

pokud tato limita existuje (v $\mathbb{C}$).

Větička 6. *Nechť c a F je jako výše.*

1. *Nechť $t \in \mathbb{R}$ je libovolné. Pak existence a hodnota $\mathcal{L}_{-1}(F)(t)$ nezávisí na volbě $\xi \in (c, +\infty)$.*
2. *Nechť pro nějaké $\xi > c$ je funkce $u \mapsto F(\xi + iu)$ integrovatelná na $\mathbb{R}$. Pak platí:*
   - *(i) Funkce $f(t) = \mathcal{L}_{-1}(F)(t)$ je definována na $\mathbb{R}$.*
   - *(i) $f|_{[0,+\infty)}$ patří do L_1^+ a $c_{f|_{[0,+\infty)}} \leq \xi$.*
   - *(ii) $\mathcal{L}(f|_{[0,+\infty)}) = F$.*

Věta 7. *Nechť $c \in \mathbb{R}$ a F je funkce holomorfní na polorovině $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > c\}$. Dále nechť existují taková $A, B > 0$, že*

$$|F(p)| \leq \frac{A}{|p|^2} \qquad \text{pro } p \in \mathbb{C}, |p| \geq B, \operatorname{Re} p > c.$$

Definujme funkci f předpisem $f(t) = \mathcal{L}_{-1}(F)(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$. Pak platí:

1. *f je spojitá na $\mathbb{R}$ a $f(t) = 0$ pro $t \leq 0$.*
2. *Existují taková $\alpha, \beta \geq 0$, že $|f(t)| \leq \alpha e^{\beta t}$ pro $t \geq 0$.*
3. *$\mathcal{L}(f|_{[0,+\infty)}) = F$.*

Věta 8. *Nechť M označuje množinu všech komplexních lineárních kombinací funkcí tvaru $t^n e^{\alpha t}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, zúžených na interval $[0, +\infty)$ a N nechť označuje množinu všech racionálních funkcí, které mají v ∞ limitu nula (tedy stupeň jmenovatele je větší než stupeň čitatele). Pak platí:*

1. *$\mathcal{L}$ zobrazuje M prostě na N.*
2. *Pro každé $f \in M$ je $f = \mathcal{L}_{-1}(\mathcal{L}(f))$.*
3. *Nechť $F \in N$ a nechť kořeny jmenovatele jsou $p_1, \dots, p_k$. Pak*

$$\mathcal{L}_{-1}(F)(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}_{p_j}(F(p)e^{pt}) & \text{pro } t > 0, \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$

4. *Nechť $F \in N$. Pak $\lim\limits_{t \to 0+} \mathcal{L}_{-1}(F)(t) = 0$, právě když stupeň jmenovatele je alespoň o dva větší než stupeň čitatele.*