II.3 Logaritmus, argument, obecná mocnina

Definice.

- **Reálný logaritmus**, tj. inverzní funkci k $\exp|_{\mathbb{R}}$ budeme značit ln.
- Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ označme

$$\operatorname{Log}(z) = \{w \in \mathbb{C} : \exp(w) = z\}.$$

- Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. **Hlavní hodnotou logaritmu** čísla z nazýváme takové $w \in \operatorname{Log}(z)$, pro které $\operatorname{Im} w \in (-\pi, \pi]$. Hlavní hodnotu logaritmu čísla z značíme $\log(z)$.
- Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definujme

$$\operatorname{Arg}(z) = \{\operatorname{Im} w : w \in \operatorname{Log}(z)\}$$

  a

$$\arg(z) = \operatorname{Im} \log(z).$$

  Číslo $\arg(z)$ nazýváme **hlavní hodnota argumentu** čísla z.

Věta 5.

(1) *Pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je $\operatorname{Log}(z) \neq \emptyset$ a platí $\operatorname{Log}(z) = \{\log(z) + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$.*
(2) *Funkce* log *je inverzní funkcí k funkci* $\exp|_{\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]\}}$.
(3) *Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí $\log(z) = \ln |z| + i \arg(z)$.*
(4) *Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí $z = |z|(\cos \arg(z) + i \sin \arg(z))$ (***goniometrický zápis komplexního čísla*** z).*
(5) *Nechť $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Pak platí*

$$\arg(z) = \begin{cases} \arcsin \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \textit{je-li } \operatorname{Re} z > 0, \\ \arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \textit{je-li } \operatorname{Im} z > 0, \\ -\arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \textit{je-li } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

(6) *Funkce* arg *je spojitá na* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
(7) *Funkce* log *je spojitá na* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
(8) *Funkce* log *je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a na této množině platí $\log'(z) = \frac{1}{z}$.*

Definice. Nechť $z, a \in \mathbb{C}$, přičemž $z \neq 0$. Pak definujeme

- $M_a(z) = \{\exp(aw) : w \in \operatorname{Log}(z)\}$ (a**-tá mocnina komplexního čísla** z)
- $m_a(z) = \exp(a \log(z))$ (**hlavní hodnota** a**-té mocniny komplexního čísla** z)
- Je-li $z > 0$, značíme $z^a = m_a(z) = \exp(a \ln(z))$.

Větička 6. *Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

(1) *Je-li $n \in \mathbb{Z}$, obsahuje množina $M_n(z)$ právě jeden prvek, a to prvek z^n, kde*

$$z^0 = 1; \qquad z^n = \underbrace{z \cdot \ldots \cdot z}_{n\text{-krát}} \text{ pro } n > 0; \qquad z^n = \frac{1}{z^{-n}} \text{ pro } n < 0.$$

(2) *Je-li $n \in \mathbb{N}$, obsahuje množina $M_{1/n}(z)$ právě n prvků.*