III.1 Křivky a křivkový integrál v $\mathbb{C}$

Definice. **Křivkou v** $\mathbb{C}$ rozumíme spojité zobrazení uzavřeného intervalu do $\mathbb{C}$, tj. spojitou funkci $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$, kde $a < b$ jsou reálná čísla. Je-li $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ křivka, pak

- **obrazem křivky** φ rozumíme její obor hodnot, tj. množinu
$$\langle \varphi \rangle = \varphi([a,b]) = \{\varphi(t) : t \in [a,b]\};$$
- **počátečním bodem křivky** φ rozumíme bod $\varphi(a)$, **koncovým bodem** bod $\varphi(b)$;
- křivku φ nazýváme **uzavřenou**, pokud $\varphi(a) = \varphi(b)$;
- **opačnou křivkou k** φ rozumíme křivku $\dot{-}\,\varphi : [-b,-a] \to \mathbb{C}$ definovanou vzorcem $\dot{-}\,\varphi(t) = \varphi(-t)$;
- je-li navíc $\psi : [c,d] \to \mathbb{C}$ křivka, pro kterou $\psi(c) = \varphi(b)$, pak jejich **spojením** $\varphi \dot{+} \psi$ rozumíme křivku definovanou na intervalu $[a, b+d-c]$ vzorcem
$$(\varphi \dot{+} \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a,b], \\ \psi(t-b+c), & t \in [b, b+d-c]; \end{cases}$$
- **délkou křivky** φ rozumíme
$$V(\varphi) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})| : n \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \right\}.$$

Křivku $\varphi(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$, nazýváme **kladně orientovaná kružnice o středu** a **a poloměru** r. Opačnou křivku nazýváme **záporně orientovaná kružnice**.

Křivku $\varphi(t) = a + t(b-a)$, $t \in [0,1]$, kde $a, b \in \mathbb{C}$, nazýváme **orientovaná úsečka** $[a,b]$.

Cestou neboli **po částech hladkou křivkou** v $\mathbb{C}$ rozumíme křivku $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$, pro kterou existuje takové dělení $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$, že pro každé $j = 1, \ldots, n$ je funkce φ třídy C^1 na $[s_{j-1}, s_j]$ (tj. derivace φ' je spojitá na (s_{j-1}, s_j) a má v krajních bodech s_{j-1} a s_j vlastní jednostranné limity).

Je-li navíc $f : \langle \varphi \rangle \to \mathbb{C}$ spojitá funkce, definujeme **integrál funkce** f **podél cesty** φ vzorcem
$$\int_\varphi f = \int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$
kde integrál na pravé straně je zobecněný Riemannův, tj. roven
$$\sum_{j=1}^{n} \int_{s_{j-1}}^{s_j} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka. Je-li $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ cesta, pak $V(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$.

Větička 1. *Nechť* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ *je cesta.*

(1) *Nechť* h *je rostoucí zobrazení intervalu* $[c,d]$ *na interval* $[a,b]$*, které je třídy* C^1*. Pak*
$$\int_{\varphi \circ h} f = \int_\varphi f \text{ pro každou spojitou } f : \langle \varphi \rangle \to \mathbb{C}.$$

(2) $\displaystyle\int_{\dot{-}\varphi} f = -\int_{\varphi} f$ *pro každou spojitou* $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$.

(3) *Je-li* $\psi : [c, d] \to \mathbb{C}$ *cesta splňující* $\psi(c) = \varphi(b)$, *pak*

$$\int_{\varphi\dot{+}\psi} f = \int_{\varphi} f + \int_{\psi} f \text{ pro každou spojitou } f : \langle\varphi\rangle \cup \langle\psi\rangle \to \mathbb{C}.$$

(4) $\displaystyle\left|\int_{\varphi} f\right| \leq V(\varphi) \cdot \max_{z\in\langle\varphi\rangle} |f(z)|$ *pro každou spojitou* $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$.

Větička 2. *Nechť* f *je komplexní funkce komplexní proměnné spojitá na okolí bodu* $a \in \mathbb{C}$. *Pak*

$$f(a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{[a,a+h]} f.$$

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f : G \to \mathbb{C}$ je funkce. Funkci $F : G \to \mathbb{C}$ nazýváme **primitivní funkcí k f na** G, pokud $F'(z) = f(z)$ pro každé $z \in G$.

Větička 3. *Nechť* $G \subset \mathbb{C}$ *je otevřená,* $f : G \to \mathbb{C}$ *je spojitá funkce a* F *je primitivní funkce k* f *na* G. *Pak pro každou cestu* $\varphi : [a, b] \to G$ *platí* $\displaystyle\int_{\varphi} f = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$.

Speciálně, je-li φ *uzavřená cesta v* G, *pak* $\displaystyle\int_{\varphi} f = 0$.

Věta 4 (charakterizace oblasti). *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je otevřená. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(a) Ω *je* **souvislá** *(tj. pro každou neprázdnou* $G \subset \Omega$ *takovou, že* G *i* $\Omega \setminus G$ *jsou otevřené množiny, platí* $G = \Omega$*).*

(b) Ω *je* **křivkově souvislá** *(tj. pro každé dva body* $z, w \in \Omega$ *existuje spojité zobrazení* $\varphi : [0, 1] \to \Omega$, *pro které* $\varphi(0) = z$ *a* $\varphi(1) = w$*).*

(c) *Každé dva body v* Ω *lze spojit lomenou čárou v* Ω *(tj. pro každé dva body* $z, w \in \Omega$ *existuje konečná posloupnost bodů* $z = u_0, u_1, \ldots, u_n = w$ *taková, že pro každé* $j = 1, \ldots, n$ *úsečka spojující* u_{j-1} *a* u_j *leží celá v* Ω*).*

Definice. Otevřenou souvislou podmnožinu $\mathbb{C}$ nazýváme **oblast**.

Věta 5 (primitivní funkce a křivkový integrál). *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je oblast a* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *je spojitá funkce. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(i) f *má v* Ω *primitivní funkci.*

(ii) *Křivkový integrál v* Ω **nezávisí na cestě**, *tj. kdykoli* $\varphi : [a, b] \to \Omega$ *a* $\psi : [c, d] \to \Omega$ *jsou dvě cesty splňující* $\varphi(a) = \psi(c)$ *a* $\varphi(b) = \psi(d)$, *pak* $\displaystyle\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f$.

(iii) *Pro každou uzavřenou cestu* $\varphi : [a, b] \to \Omega$ *je* $\displaystyle\int_{\varphi} f = 0$.