IV.3 Laurentovy řady a funkce holomorfní v mezikruží

Poznámka. Jméno Laurent se čte francouzsky, tj. přibližně **Lorán**.

Definice. **Laurentovou řadou o středu** $a \in \mathbb{C}$ rozumíme symbol

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \tag{*}$$

kde $a_n \in \mathbb{C}$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$. **Regulární částí** řady (*) rozumíme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

hlavní částí řady (*) rozumíme symbol

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n. \tag{**}$$

Říkáme, že **hlavní část řady** (*) **konverguje** (**v bodě** z, **absolutně**, **stejnoměrně na množině** M, **lokálně stejnoměrně na množině** M, atp.), pokud příslušnou vlastnost má řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n}.$$

Součet této řady nazveme **součtem hlavní části řady** (*) a značíme jej rovněž (**).

Říkáme, že **řada** (*) **konverguje** (**v bodě** z, **absolutně**, **stejnoměrně na množině** M, **lokálně stejnoměrně na množině** M, atp.), pokud příslušnou vlastnost má regulární i hlavní část. **Součtem řady** (*) rozumíme součet součtu regulární části a součtu hlavní části, tj.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n.$$

Definice. Nechť $0 \le r < R \le +\infty$ a $a \in \mathbb{C}$. Pak označme

$$P(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}.$$

Tuto množinu nazveme **mezikružím o středu** a**, vnitřním poloměru** r **a vnějším poloměru** R.

Větička 3. *Mějme Laurentovu řadu (*). Pak existují $r, R \in [0, +\infty]$, pro která platí:*

- *Regulární část řady (*) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$ a diverguje pro $|z-a| > R$.*
- *Hlavní část řady (*) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| > r\}$ a diverguje pro $|z-a| < r$.*

Je-li $r < R$, pak řada (*) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na mezikruží $P(a, r, R)$ a její součet je na tomto mezikruží holomorfní. Toto mezikruží pak nazýváme **mezikružím konvergence řady** *(*).*

Větička 4. *Nechť $a \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le +\infty$ a $\theta \in [0, 2\pi)$. Nechť*

$$G = P(a, r, R) \setminus \{a + te^{i\theta} : t \in (0, +\infty)\}.$$

Pak pro množinu G platí Cauchyova věta, tj., pro každou f holomorfní na G a každou uzavřenou křivku φ v G platí $\int_\varphi f = 0$.

Věta 5. *Nechť f je holomorfní funkce v mezikruží $P(a, r, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r < R$. Pro $\rho \in (r, R)$ označme φ_ρ kladně orientovanou kružnici o středu a a poloměru ρ. Pak platí:*

(a) *$\int_{\varphi_\rho} f$ nezávisí na ρ, tj. nabývá stejné hodnoty pro každé $\rho \in (r, R)$.*

(b) (Cauchyův vzorec pro mezikruží) *Nechť $z \in P(a, r, R)$ a $r < \rho_1 < |z-a| < \rho_2 < R$. Pak*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\varphi_{\rho_2}} \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w - \int_{\varphi_{\rho_1}} \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w \right).$$

Věta 6. *Nechť f je holomorfní funkce v mezikruží $P(a,r,R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r < R$. Pak f je v $P(a,r,R)$ součtem Laurentovy řady*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

o středu a, která na $P(a,r,R)$ konverguje. Její koeficienty jsou určeny jednoznačně a platí pro ně

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}z, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

kde $\rho \in (r,R)$ je libovolné a φ_ρ je jako ve Větě 5.

Věta 7. *Nechť f je holomorfní funkce v $P(a,R) = P(a,0,R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $R > 0$. Nechť $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ je Laurentova řada funkce f v $P(a,R)$. Pak platí:*

(1) *f má v bodě a odstranitelnou singularitu, právě když $a_n = 0$ pro každé $n < 0$.*
(2) *f má v bodě a pól násobnosti p, právě když $a_{-p} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro každé $n < -p$.*
(3) *f má v bodě a podstatnou singularitu, právě když $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n < 0$.*

Definice. Nechť f je holomorfní funkce v $P(a,R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $R > 0$. Nechť

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

je Laurentova řada funkce f v $P(a,R)$. Pak **reziduem funkce f v bodě** a rozumíme číslo

$$\operatorname{res}_a f = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} f,$$

kde $\rho \in (0,R)$ a φ_ρ je jako ve Větě 5.

Věta 8 (reziduová věta). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $M \subset \Omega$ konečná množina a $\varphi : [a,b] \to \Omega \setminus M$ uzavřená cesta. Předpokládejme, že pro Ω a φ platí Cauchyova věta, tj. $\int_\varphi g = 0$ pro každou funkci g holomorfní na Ω. Pak pro každou funkci f holomorfní na $\Omega \setminus M$ platí*

$$\int_\varphi f = 2\pi i \sum_{a \in M} \operatorname{res}_a f \cdot \operatorname{ind}_\varphi a.$$

Věta 9 (některé metody výpočtu reziduí). *Nechť f a g jsou holomorfní funkce v nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{C}$.*

(1) *Má-li funkce f v bodě a pól násobnosti p, pak*

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} \left(f(z)(z-a)^p\right)^{(p-1)}.$$

(2) *Jsou-li f, g holomorfní v bodě a a g má v bodě a kořen násobnosti 1 (tj. $g(a) = 0$ a $g'(a) \neq 0$), pak $\operatorname{res}_a \frac{f}{g} = \frac{f(a)}{g'(a)}$.*
(3) *Je-li f holomorfní v a a g má v a pól násobnosti 1, pak $\operatorname{res}_a(fg) = f(a) \cdot \operatorname{res}_a g$.*
(4) *Je-li f holomorfní v bodě a a g má v bodě a pól násobnosti p, pak*

$$\operatorname{res}_a(fg) = \sum_{k=1}^{p} \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} b_{-k},$$

kde b_n je koeficient u $(z-a)^n$ v Laurentově řadě funkce g v prstencovém okolí bodu a.