

I.1 Těleso komplexních čísel

Definice. Množinou komplexních čísel rozumíme množinu \mathbb{R}^2 (tj. množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel) s následujícími operacemi:

- sčítání a násobení reálným číslem (definovanými stejně jako v \mathbb{R}^2);
- násobení definované vzorcem

$$(x, y) \cdot (a, b) = (xa - yb, xb + ya), \quad (x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Množinu komplexních čísel značíme \mathbb{C} .

Základní vlastnosti \mathbb{C} .

- Množina \mathbb{C} s operacemi sčítání a násobení tvoří komutativní těleso, nulovým prvkem je $(0, 0)$, jednotkovým prvkem je $(1, 0)$. Inverzním prvkem k nenulovému prvku (x, y) je prvek $(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$.
- Zobrazení množiny \mathbb{R} do \mathbb{C} definované předpisem $x \mapsto (x, 0)$ je tělesový izomorfismus \mathbb{R} na $\{(x, y) \in \mathbb{C} : y = 0\}$. Tudíž \mathbb{R} budeme uvažovat jako podtěleso \mathbb{C} .
- Na \mathbb{C} není definováno uspořádání. Na \mathbb{C} ani nelze definovat uspořádání tak, aby bylo uspořádaným tělesem.

Proč právě \mathbb{R}^2 ?

- V \mathbb{R} není řešitelná rovnice $x^2 + 1 = 0$, v \mathbb{C} má každý polynom stupně alespoň 1 alespoň jeden kořen. (Dokážeme později.)
- Pro $n > 2$ lze na \mathbb{R}^n definovat „rozumné“ násobení jen pro $n = 4$ (tzv. kvaterniony, které tvoří nekomutativní těleso) a pro $n = 8$ (tzv. oktoniony nebo Cayleyho čísla, pro ně už násobení není ani asociativní).

Zápisy komplexního čísla

- Označme $i = (0, 1)$. Pak $i^2 = (-1, 0)$ a číslo i nazýváme **imaginární jednotkou**.
- Algebraický zápis komplexního čísla:** $(x, y) = x + iy$. Přitom zkracujeme zápis $x + i0 = x$ a $0 + iy = iy$.
- Maticový zápis komplexního čísla:**

$$(x, y) = x + iy = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Potom násobení komplexních čísel odpovídá násobení matic.

Definice. Necht' $z = (x, y) = x + iy = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Pak definujeme:

- $\operatorname{Re} z = x$ (**reálná část** komplexního čísla z);
- $\operatorname{Im} z = y$ (**imaginární část** komplexního čísla z);
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}}$ (**absolutní hodnota** komplexního čísla z);
- $\bar{z} = x - iy$ (**komplexně sdružené číslo** ke komplexnímu číslu z).

Pro každá $z, w \in \mathbb{C}$ platí:

- (1) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;
- (2) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$;
- (3) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;
- (4) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$;
- (5) $|\bar{z}| = |z|$.

\mathbb{C} jako metrický prostor:

Při ztotožnění \mathbb{C} s \mathbb{R}^2 je $|z|$ rovno eukleidovské normě z . Vzorec $d(z, w) = |z - w|$ definuje tedy **metriku** na \mathbb{C} . Tudíž víme například, co je to **okolí bodu** $U(a, r)$, **otevřená množina**, **uzavřená množina**, **konvergence posloupnosti** v \mathbb{C} , **spojitost a limita zobrazení** z \mathbb{R} do \mathbb{C} , z \mathbb{C} do \mathbb{R} i z \mathbb{C} do \mathbb{C} .

Poznámka: Funkce $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $z \mapsto \operatorname{Im} z$, $z \mapsto \bar{z}$ a $z \mapsto |z|$ jsou spojité na \mathbb{C} .

\mathbb{C} jako vektorový prostor

- (1) \mathbb{C} je vektorový prostor dimenze 2 nad \mathbb{R} . V tomto případě lineární zobrazení \mathbb{C} do \mathbb{C} mají tvar

$$(x, y) \mapsto (x, y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ jsou libovolná.

- (2) \mathbb{C} je vektorový prostor dimenze 1 nad \mathbb{C} . V tomto případě mají lineární zobrazení \mathbb{C} do \mathbb{C} tvar

$$z \mapsto z \cdot w,$$

kde $w \in \mathbb{C}$ je libovolné; při identifikaci \mathbb{C} s \mathbb{R}^2 je to tvar

$$(x, y) \mapsto (x, y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou libovolná.

I.2 Komplexní funkce reálné proměnné

Definice.

- (1) **Komplexní funkcí reálné proměnné** rozumíme zobrazení $f : M \rightarrow \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{R}$.
- (2) Necht' $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ je zobrazení. Pak definujeme funkce $\operatorname{Re} f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a $\operatorname{Im} f : M \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$\operatorname{Re} f : x \mapsto \operatorname{Re}(f(x)), \quad x \in M,$$

$$\operatorname{Im} f : x \mapsto \operatorname{Im}(f(x)), \quad x \in M.$$

- (3) Necht' f je komplexní funkce reálné proměnné a $x \in \mathbb{R}$. **Derivací funkce f v bodě x** rozumíme číslo

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

pokud tato limita existuje (v \mathbb{C}).

- (4) Funkce $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ je **primitivní funkce k f na (a, b)** , jestliže $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$.

Větička 1. Necht' $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ je komplexní funkce reálné proměnné, $a \in \mathbb{R}$ a $z \in \mathbb{C}$. Pak platí

- (1) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = z$, právě když

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} z \text{ a } \lim_{x \rightarrow a^+} \operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im} z.$$

Podobně pro limity zleva a oboustranné.

- (2) f je spojitá (zleva, zprava) v bodě a , právě když obě funkce $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ jsou spojité (zleva, zprava) v bodě a .
- (3) $f'(x)$ existuje, právě když existují vlastní derivace $(\operatorname{Re} f)'(x)$ a $(\operatorname{Im} f)'(x)$. Pak $f'(x) = (\operatorname{Re} f)'(x) + i(\operatorname{Im} f)'(x)$.
- (4) Funkce $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ je primitivní funkce k f na (a, b) , právě když $\operatorname{Re} F$ je primitivní funkcí k $\operatorname{Re} f$ na (a, b) a $\operatorname{Im} F$ je primitivní funkcí k $\operatorname{Im} f$ na (a, b) .

Definice. Necht' f je komplexní funkce reálné proměnné. **Integrál (Riemannův, Newtonův, Lebesgueův) z funkce f od a do b** definujeme jako číslo

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re} f + i \int_a^b \operatorname{Im} f,$$

pokud oba integrály na pravé straně konvergují.

Větička 2. Necht' $a < b$ jsou reálná čísla a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak platí

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq (b - a) \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

I.3 Komplexní funkce komplexní proměnné

Definice.

- (1) **Komplexní funkcí komplexní proměnné** rozumíme zobrazení $f : M \rightarrow \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{C}$.
- (2) Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné a $a \in \mathbb{C}$. **Derivací funkce f podle komplexní proměnné v bodě a** (stručněji **derivací funkce f v bodě a**) rozumíme (komplexní) číslo

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

pokud limita na pravé straně existuje (v \mathbb{C}).

Poznámky. (i) Pro derivaci podle komplexní proměnné platí věty o derivaci součtu, součinu, podílu a složené funkce ve stejné podobě jako pro derivaci v \mathbb{R} .

(ii) Má-li f v bodě $a \in \mathbb{C}$ derivaci podle komplexní proměnné, je v bodě a spojitá.

(iii) Je-li f komplexní funkce komplexní proměnné, g komplexní funkce reálné proměnné a $x \in \mathbb{R}$, pak

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

pokud obě derivace na pravé straně existují.

Věta 3. Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné. Označme $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ funkci dvou reálných proměnných s hodnotami v \mathbb{R}^2 odpovídající f při ztotožnění \mathbb{C} a \mathbb{R}^2 ; tj. takovou, že

$$f(x + iy) = \tilde{f}_1(x, y) + i\tilde{f}_2(x, y)$$

pro $x + iy$ z definičního oboru f .

- (a) **(Cauchy-Riemannovy podmínky)** Nechť $z = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pak f má v bodě z derivaci podle komplexní proměnné, právě když \tilde{f} má v bodě (a, b) totální diferenciál a platí $\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y}(a, b)$ a $\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y}(a, b) = -\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x}(a, b)$.
- (b) Existuje-li $f'(z)$, je Jacobiho determinant \tilde{f} v bodě (a, b) roven $|f'(z)|^2$. Speciálně, Jacobiho matice \tilde{f} v bodě (a, b) je regulární, právě když $f'(z) \neq 0$.

Poznámka: Je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená konvexní množina a $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ splňuje $f'(z) = 0$ pro všechna $z \in G$, je f konstantní na G .

Definice.

- Nechť $M \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že funkce f je **holomorfní na množině M** , jestliže existuje otevřená množina $G \supset M$ taková, že f má derivaci (podle komplexní proměnné) v každém bodě množiny G .
- Funkce holomorfní na \mathbb{C} se nazývá **celá funkce**.