Věta IV.13 $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, $M \subset \Omega$ konečná, $\varphi : [a,b] \to \Omega \setminus M$ uzavřená cesta.

Nechť pro Ω a φ platí Cauchyova věta (tj. $\forall g$ holomorfní na Ω: $\int_\varphi g = 0$)

Pak $\forall f$ holomorfní na $\Omega \setminus M$ platí

$$\int_\varphi f = 2\pi i \sum_{a \in M} \operatorname{res}_a f \cdot \operatorname{ind}_\varphi a .$$

Dk: Rozdíl oproti Větě 3 je jen v tom, že v bodech M připouštíme i podstatné singularity. Důkaz bude podobný:

$a \in M \Rightarrow \exists\, r > 0 : P(a,r) \subset \Omega \setminus M$. Pak f je holomorfní na $P(a,r)$, je zde tedy součtem Laurentovy řady. Označme H_a součet hlavní části této L.Ř. Dle VP hlavní část konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ („vnitřní poloměr" je 0), tedy H_a je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{a\}$

Uvažme funkci $g = f - \sum_{a \in M} H_a$. Pak g je holomorfní na $\Omega \setminus M$ a v každém bodě M má odstranitelnou singularitu. Po dodefinování je tedy holomorfní na Ω,

tedy $\int_\varphi g = 0$ dle předpokladu

Proto $\int_\varphi f = \int_\varphi \sum_{a \in M} H_a = \sum_{a \in M} \int_\varphi H_a$

konečný součet.

Spočítáme $\int_\varphi H_a$: $H_a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$, řada

konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, tedy stejnoměrně na kompaktní množině $\langle\varphi\rangle \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$, proto podle VIII.7 (1) máme

$$\int_\varphi H_a = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\varphi \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}\, dz = \int_\varphi \frac{c_{-1}}{z-a}\, dz = $$

$\frac{1}{(z-a)^n}$ pro $n \geq 2$ má prim. funkci na $\mathbb{C} \setminus \{a\}$

$$= c_{-1} \cdot \int_\varphi \frac{1}{z-a} = \operatorname{res}_a f \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{ind}_\varphi a.$$

Sečtením předchozích dostáváme kýžený vzorec.